四庫全書

子部

欽定四庫全書

子部

御製數理精藴上編卷三

詳校官欽天監天文生臣賈德輔

靈臺郎臣倪廷梅覆勘

總校官檢討臣何思鈞

校對官教習臣倪廷梅

謄録監生臣劉士煌

繪圖監生臣周濬

欽定四庫全書

御製數理精蘊上編卷三

幾何原本六

幾何原本七

幾何原本八

幾何原本九

幾何原本十

幾何原本六

第一

大凡欲論諸物之不齊必借同類之物以比之始可以得其不齊之度數如一線與他線相比其度之或長或短其數之或多或少自能見之如一面與他面相比其面度之或大或小其積數之或多或少自能見之又如一體與他體相比其體度之或厚或

薄其積數之或多或少亦自能見之若將一線與一面相比或一面與一體相比既不同類又不同形則線之長短面之大小體之厚薄俱不可辯矣故曰欲論諸物之不齊必借同類之物以比之也

第二

將兩數相比其度互為大小則謂之比例其比者與所比者俱謂之率率者

甲

乙

法也矩也以數互相準之之謂也其比之數為前率其所比之數為後率如甲乙二數互相為比具相較之分甲數之度為長其分為多乙數之度為短其分為少如是以比之故謂之二率甲為比之之數故謂之前率乙為所比之數故謂之後率焉

第三

有四率兩兩相比其一率與二率之比

甲
乙
丙
丁

同於三率與四率之比則謂之同理比例也如甲乙丙丁四數甲與乙比丙與丁比苟乙為甲六分之五丁為丙六分之五則甲與乙之比例丙與丁之比例此兩比例相同而乙有甲幾分之數即可知丁有丙幾分之數矣故凡四率內將一率與三率分數定為相等二率與四率分數亦定為相等其度之長短雖有不同苟分數定準則一率與二率之

甲
乙
丙
丁

比即如三率與四率之比也夫甲乙丙丁四線内甲第一線與丙第三線俱各定為六分乙第二線與丁第四線俱各定為五分則甲度之長雖大於丙度之長其分數則俱為六丙乙度之長雖大於丁度之長其分數亦俱為五故知乙第二線度與甲第一線度之六分之五分相等丁第四線度亦與丙第三線度之六分之五分相等所以甲線之比乙

甲
乙
丙
丁

線即如丙線之比丁線而謂之同理比例也

第四

凡四率兩兩相比其一率與二率相比之分若大於三率與四率相比之分則為不同理之比例而比例不得行也如有甲乙丙丁四數甲與乙丙與丁各互相為比苟甲第一數與乙第二數相比之分為六與四其丙第三數與丁第四

甲
乙
丙
丁

數相比之分為五與四則此甲與乙之比大於彼丙與丁之比矣故凡如此例者以一率二率相比之分為準則三率四率相比之分為小若依三率四率相比之分為準則一率二率相比之分又大故謂之不同理之比例而比例四率不能行也

第五

凡有四率一率之度與二率之度相比

分數若同於三率之度與四率之度相比分數則此四率又謂之相當比例四率焉如甲乙丙丁四線茍甲線與乙線相比之度與丙線與丁線相比之度其分數同則此四線謂之各相當線而每兩率相比其每度之分數同故又謂之相當比例四率也

第六

凡三率互相為比其一率與二率之比

甲
乙
丙
丁
戊

同於二率與三率之比則謂之相連比例率也如甲乙丙三數互相為比苟甲數與乙數之比同於乙數與丙數之比則此甲乙丙三數謂之相連比例率矣若相連比例率內將一率與三率比之則為隅一位加一倍之比例或有相連比例四率將一率與四率比之則為隅二位加二倍之比例大凡有幾率隅幾位以比者皆以隅幾位而為加幾倍之

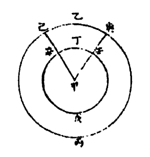
比例也如甲乙丙相連比例率內其甲與丙之比為隔一位加一倍之比例又或甲乙丙丁戊五數俱為相連比例率其甲與丁之比即為隔二位加二倍之比例丙甲與戊之比則又為隔三位加三倍之比例矣

第七

相當比例四率為數學之要因其理之所該最廣故設為雙圜圖以申明之立

甲點為心作乙丙一大圜丁戊一小圜此二圜界各具三百六十度故皆可以為三百六十分首卷第十七節云凡圜無論大小俱定為三百六十度於是自圜之甲心過小圜界之辛壬二處至大圜己庚二處作二線則大圜之己甲庚小圜之辛甲壬俱同一甲角此甲角相對之己庚弧界設為六十度則為乙丙大圜三百六十分中之六十分矣乙丙大圜之己庚弧界度既為

六十分則丁戊小圜之辛壬弧界度亦為六十分矣大凡角度俱定於相對之圜界（見首卷第九節）今此大圜之己庚弧界小圜之辛壬弧界俱與一甲角相對其度雖依圜之大小不同而分數則等分數既等則大圜小圜大弧小弧兩兩互相為比即如四率之兩兩相比為同理比例矣是以大圜之三百六十分為一率自大圜所分之己庚弧之六十分為二



率小圜之三百六十分為三率自小圜所分之辛壬弧之六十分為四率其乙丙大全圜與本圜巳庚分之比即同於丁戊小全圜與本圜辛壬分之比也故凡各率各度雖異相當之分數若同則一率與二率之比必同於三率與四率之比而俱謂之順推比例矣要之分合加減各率之法總不越此圖之互轉相較之理也

甲
乙
丙
丁

第八

一種反推比例將一率與二率之比同於三率與四率之比者反推之以二率與一率為比四率與三率為比其所比之例仍同故亦謂之相當比例率也如甲乙丙丁四數將甲與乙之比同於丙與丁之比反推之以乙與甲為比丁與丙為比則所比之例仍同於相當比例率焉以前雙圜圖解之葢甲數與乙數

乙
甲
丁
丙

之比例即乙丙大圜全界與所分已庚弧界之比例丙數與丁數之比例即丁戊小圜全界與所分辛壬弧界之比例也今反以乙與甲為比丁與丙為比即如以乙丙大圜所分之已庚弧界與乙丙大圜全界為比丁戊小圜所分之辛壬弧界與丁戊小圜全界為比也因其以二率為一率以三率為四率前後互移故謂之反推比例然名雖為反推比

甲
乙
丙
丁

例而相當比例之率仍與順推比例相同也

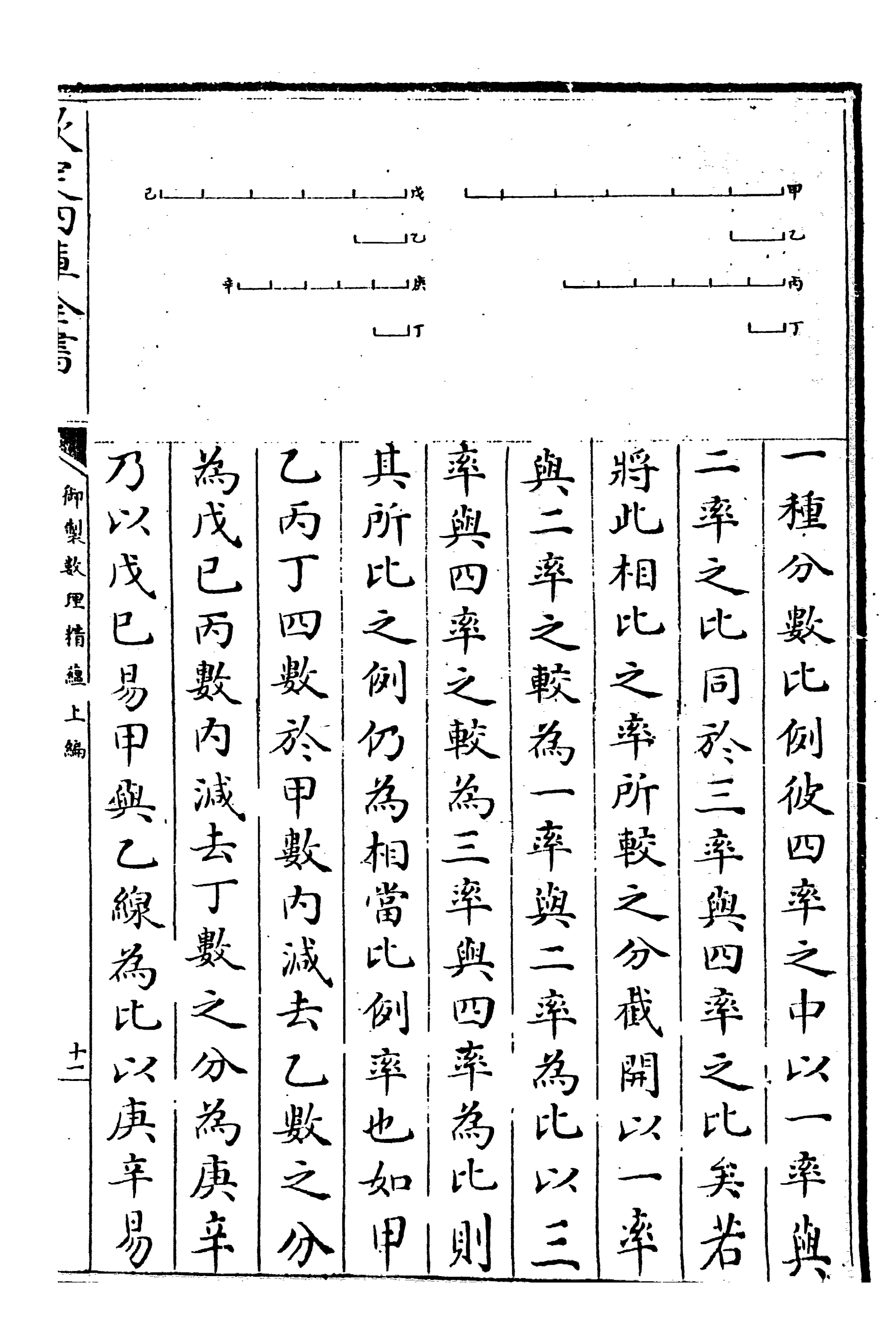
第九

一種遞轉比例將一率與二率之比同於三率與四率之比者轉較之以一率與三率為比二率與四率為比其所比之例仍為相當比例率也如甲乙丙丁四數將甲與乙之比同於丙與丁之比轉較之以甲與丙為比乙與丁為比則

所比之例仍同於相當比例率也如前雙圜圖乙丙大圜全界一率與所分巳庚弧界二率之比同於丁戊小圜全界三率與所分辛壬弧界四率之比若轉較之以乙丙大圜之一率與丁戊小圜之三率為比大圜所分之巳庚弧界二率與小圜所分之辛壬弧界四率為比其度雖依圜之大小有異而分數則同其比例仍同於原比例故甲乙丙

丁之四數亦如大小二圜為互相比例之率而甲一率與丙三率之比即大圜與小圜之比乙二率與丁四率之比即大圜所分弧界與小圜所分弧界之比也葢以三率為二率以二率為三率遞轉相較故謂之遞轉比例其相當比例之四率雖遞轉以較之亦仍為相當比例之四率也

第十



一種分數比例彼四率之中以一率與二率之比同於三率與四率之比矣若將此相比之率所較之分截開以一率與二率之較為一率與二率為比以三率與四率之較為三率與四率為比則其所比之例仍為相當比例率也如甲乙丙丁四數於甲數内減去乙數之分為戊已丙數内減去丁數之分為庚辛乃以戊巳易甲與乙線為比以庚辛易

丙與丁線為比則所比之例仍同於相當比例率也如前雙圜圖於乙丙太圜全界內減去所分已庚弧界一段仍與已庚弧界為比丁戊小圜全界內減去所分辛壬弧界一段仍與辛壬弧界為比亦與大圜全界與大圜所分弧界小圜全界與小圜所分弧界相比之理同故此甲線內截去乙所成戊已仍與乙相比即如乙丙大圜全分截去已

庚弧界一段仍與巳庚弧界相比而丙線內截去丁所成庚辛仍與丁相比即如丁戊小圜全分截去辛壬弧界一段仍與辛壬弧界相比也其比例仍同於相當比例四率但因其各分內有分開相減之故所以謂之分數比例也

第十一

一種合數比例有四率以一率與二率之比同於三率與四率之比矣若將此

相比之率併之以一率與二率相加為一率仍與二率為比以三率與四率相加為三率仍與四率為比其所比之例亦仍同於相當比例之四率也如甲乙兩丁四數以甲數與乙數相加共為一率與乙數為比丙數與丁數相加共為三率與丁數為比則所比之例仍同於相當比例四率也此合數比例與分數比例之理互相對待彼分數比例以雙

圜圖二圜全界內減去所分弧界一段仍與所分弧界一段為比今此合數比例即如二圜全界內所分大段加入所分弧界一小段即是全界而與所分弧界一段為比也其所比之理仍同於相當比例四率但因有相加之加故謂之合數比例焉

第十二

一種更數比例以一率與二率之比同

甲

乙

丙

丁

於三率與四率之比者更之將一率與二率相減用其餘分為二率仍與一率為比又將三率與四率相減用其餘分為四率仍與三率為比則其比例之理仍同於相當比例四率也如甲乙丙丁四數於甲第一率內減去乙第二率所餘為戊已乃以戊已立乙第二率之位而以甲與戊已為比復於丙第三率內減去丁第四率所餘為庚辛乃以庚辛

立丁第四率之位而以丙與庚辛為比其所比之理仍同於四率之比例故亦為相當比例之四率也今以雙圜圖解之乙丙大圜三百六十度之全界仍為一率全界內減去所所分之已庚弧界六十度一段餘已丙庚三百度一大段為二率丁戊小圜三百六十度之全界仍為三率全界內減去所分之辛壬弧界六十度一段餘辛

甲

戊 己

丙

庚 辛

戊壬三百度一大段 壬 戊 為四率則乙丙大圜三百六十度之全界如甲所更之己丙庚三百度如戊己而丁戊小圜三百六十度之全界如丙所更之辛戊壬三百度如庚辛故其四率之兩相比例亦同為相當比例率也凡四率之内前後之相差雖更入比之仍與相當比例之理同但以其數有更入之故所以謂之更數比例也

甲 乙 丙 丁 戊 己 庚 辛

第十三

一種隔位比例有兩相比例四率將此一邊四率內一率與末率為比彼一邊四率內一率與末率為比則其所比之例仍同於相當比例四率也如此一邊有甲乙丙丁四數彼一邊有戊己庚辛四數此甲與乙之比同於彼戊與己之比此乙與丙之比同於彼己與庚之比此丙與丁之比同於彼庚與辛之比若

甲
乙
丙
丁

將此四率隅位比之使此一邊之甲與丁為比以彼一邊之戊與辛為比則其比例仍同於相當比例四率也試以雙圜圖之大小圜所分各弧界之兩線引長自庚壬過甲至癸丑作一全徑線復自己辛過甲至子寅作一全徑線則分大圜為庚己己丑丑寅寅庚四段分小圜為壬辛辛癸癸子子壬四段其大圜之庚己己丑丑寅寅庚四段為相

當四率而小圜之壬辛辛癸癸子子壬四段亦為相當四率此二圜之所分四段既俱為相當四率則其各相比例度之大小雖異而分數相同故大圜之庚己一段與己丑一段之比同於小圜之壬辛一段與辛癸一段之比大圜之己丑一段與丑寅一段之比同於小圜之辛癸一段與癸子一段之比大圜之丑寅一段與寅庚一段之比同於小圜之

癸子一段與子壬一段之比也若以此各相當四率隅位以比之其大圜之庚己一段與寅庚一段為比而小圜之壬辛一段與子壬一段為比其比例仍同於相當比例四率但以其兩邊各相比例四率內各取兩率隅位以比之故謂之隅位比例耳

第十四

一種錯綜比例有兩連比例三率此一

邊三率內中率與末率之比同於彼一邊三率內中率與末率之比則為相當比例之四率苟錯綜其位分以此一邊首率與末率隔位為比復取另一數與彼一邊中率為比而成同理之四率則此另一數必與彼邊三率為連比例四率矣如此一邊有甲乙丙連比例三數彼一邊有丁戊己連比例三數將此一邊中率乙數與末率丙數之比同於彼

甲
乙
丙

丁
戊
己
庚
庚
丁
戊
己

一邊中率戊數與彼一邊末率己數之比則其比例為同理比例矣今錯綜其位分使此一邊所有之首率甲數與所有之末率丙數隔位為比復另取一庚數與彼一邊所有之中率戊數為比則其比例亦同於相當比例四率而此庚數與彼邊丁戊己三率為連比例之數矣何也試以庚數置於彼一邊丁首率之上則庚為首率而丁移而為中率戊

又易而為末率是故此一邊甲首率與丙末率之比同於彼一邊所取庚首率與所易戊末率之比但以兩連比例率互相易位增入比之之不同故名之為錯綜比例耳

第十五

一種加分比例凡有二率依本度各加幾倍所加之分數若等則所成之二率互相為比仍同於原二率之互相為比

謂之等倍相加之比例也如甲乙二數於甲數依本度加三倍為丙於乙數依本度加三倍為丁則此丙丁二數互相為比仍同於甲乙二數之互相為比也假若甲度為一大分乙度為一小分則甲加三倍成四大分之丙乙加三倍成四小分之丁以四大分之丙比四小分之丁以一大分之甲比一小分之乙其相當之分數既等固為同理比例可知

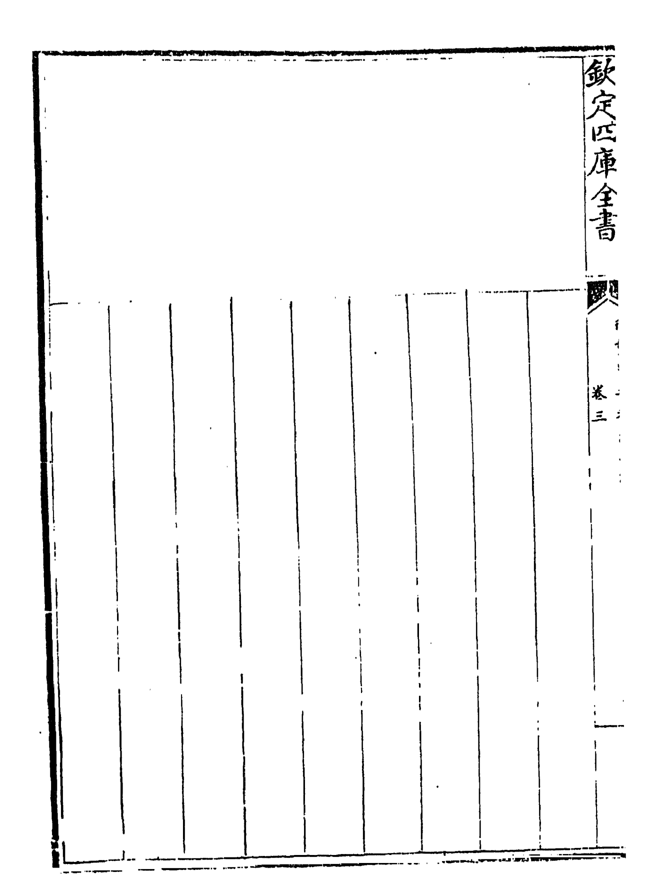
矣見本卷第三節故凡二率依本度各加幾倍其所加之分數若等其加分之率互相為比必同於原率之互相為比因於原數有相加之分故謂之加分比例也

第十六

一種減分比例凡有二率依度度各減幾倍所減之分數若俱等則所成之二率互相為比仍同於原二率之互相為比謂之等分相減之比例也如有甲乙

丙丁二數其甲乙之三分內減去甲戊一分丙丁之三分內減去丙己一分則戊乙己丁互相為比仍同於原甲乙丙丁全數之互相為比也何也夫甲乙度為三尺丙丁度為三寸自甲乙度內減去一尺則為戊乙自丙丁度內減去一寸則為己丁以所餘之戊乙二尺與所餘之己丁二寸為比以甲乙之全三尺與丙丁之全三寸為比其相當之分數

必等故亦為同理比例矣凡二率之内無論減幾分其所減之分數若等則相比之理必同於原數之比例因於原數内減之故又謂之減分比例也



幾何原本七

第一

前卷所論比例之法凡一十有二（相當比例一種相連比例一種正比例一種反比例一種遞轉比例一種分數比例一種合數比例一種更數比例一種隔位比例一種錯綜比例一種加分比例一種減分比例一種）雖種種變化不窮其每相當分數所成之率依然一理故其相比之例俱同而皆為相當比例四率也是故線與線為比面與面為比體與體為比依

甲 乙 丙 丁 戊 己

前各種比例之法線之比例若同則為相當比例線面之比例若同則為相當比例面體之比例若同則為相當比例體矣夫線面體為類不同雖不能互相為比假使線面體之每相當分數若等則按其各類相當分數比之亦為同理比例率也如甲之六分線與乙之三分線相比丙之六分面與丁之三分面相比戊之六分體與己之三分體相比此

三種每相當分數既俱相等故其比例亦俱相等而共率互為同理比例可知矣

第二

大凡直角平方面積皆生於二線之度故欲知方面所生比例之分將其二形之縱横線分考之即可得而知矣如甲乙丙丁直角平方之二面欲知其所生比例之分則視甲乙大形之甲戊横線

長度得彼丙丁小形之丙己横線長度為三倍而甲乙大形之甲庚縱線寛度得彼丙丁小形之丙辛縱線寛度為二倍假若將甲乙大形自中線平分為甲癸壬乙二形其甲癸形之甲壬寛度丙丁形之丙辛寛度必俱相等其甲戊横線長度既仍與丙己横線長度為三倍其所分之甲癸形必與丙丁三形相等再彼壬乙形亦與丙丁三形相等則此

二形相合之甲乙一全形比之丙丁小形為六分可知矣又或甲乙大形之甲戊橫線長度得丙丁小形之丙己橫線長度為四倍甲乙大形之甲庚縱線寬度得丙丁小形之丙辛縱線寬度為三倍則大形與小形四倍者有三而大形比小形為十二分可知矣再或甲乙大形之甲戊橫線比丙丁小形之丙己橫線為十二倍丙丁小形之丙辛縱線反

比甲乙大形之甲庚縱線為三倍則甲乙大形之甲戊橫線之長雖比丙丁小形之丙己橫線之長多十一倍而甲乙大形之甲庚縱線之寬又比丙丁小形之丙辛縱線之寬少二倍矣將此縱橫二線之多少較之甲乙大形比丙丁小形為四倍而丙丁小形為甲乙大形之四分之一於是以二形之縱橫多少互相較對以比例之始得知此形與彼形

之比例焉故凡直角平方面形與他一形相比其比例有二以此形之長與他形之長比之為一比例以此形之寬與他形之寬比之為一比例兩形相比之間而兼兩比例者正以平面之積自二線之度生之之故也

第三

有兩直角方面形若將此方面横界與他方面横界為比又將他方面縱界與

此方面縱界為比其比例若同則此兩方面必相等也如甲乙丙丁兩方面形甲乙形之甲戊横界比丙丁形之丙己横界大一倍而丙丁形之丙庚縱界比甲乙形之甲辛縱界亦大一倍則甲乙丙丁兩形之分必相等是知兩方面形縱横之分互相較對則兩方面之積可知矣

第四

凡有相比例四率其二率與三率相乘一率與四率相乘則所得之分數俱相等也如甲乙丁戊戊己乙丙相比例四率甲乙一率為二分丁戊二率為四分戊己三率為三分乙丙四率為六分將丁戊二率為縱線戊己三率為橫線以之相乘又將甲乙一率為縱線乙丙四率為橫線以之相乘其所得之丁己一方面形甲丙一方面形其分數俱是十

二互相等矣然則丁己形之丁戊縱度雖比甲丙形之甲乙縱度大一半而丁己形之戊己橫度復比甲丙形之乙丙橫度少一半故其縱橫互較之分相等而其積亦等也是故四率中凡有三率欲求其不知之一率將兩率之分相乘所得之數以一率之分除之即得其一率矣設如甲乙三分為一率丁戊六分為二率戊己五分為三率乙丙十分為

四率今只知一率二率三率之分欲推四率則以丁戊六分二率與戊己五分三率相乘為丁己三十分乃以甲乙三分一率除之即得乙丙十分四率矣此以小分為首率者也或知乙丙戊己丁戊之三率而推甲乙之一率則以乙丙十分為一率戊己五分為二率丁戊六分為三率二率與三率相乘一率除之即得甲乙之四率矣此以大分為首率

者也又或知甲乙丁戊乙丙之三率而推戊己之一率則以丁戊為一率甲乙為二率乙丙為三率二率與三率相乘一率除之即得戊己之四率矣此即反推比例之理也又或知戊己乙丙甲乙之三率而推丁戊之一率則以戊己為一率甲乙為二率乙丙為三率二率與三率相乘一率除之即得丁戊之四率矣此即遞轉比例之理也

第五

凡有兩直角方面形此一方面之橫界與他一方面橫界為比此一方面之縱界與他一方面縱界為比其比例若等則此兩方面之比例比之兩界之比例為連比例隔一位相加之比例也如甲乙丙丁同式二方面形其甲乙形之甲戊橫界為丙丁形丙己橫界之二倍而甲乙形之甲庚縱界亦為丙丁形丙辛

甲 庚 乙 戊　丙 辛 丁 己

縱界之二倍則甲乙形面積與丙丁形面積之比比之甲乙形之一界與丙丁形之一界之比者即如連比例三率隔一位相加之比例矣蓋甲乙方面之縱横界既為丙丁方面縱横界之二倍則甲乙方面內如丙丁方面之二倍者有二二其二為四故甲乙方面積比丙丁方面積為四倍今甲乙方面積為一十六分與丙丁方面積之四分相比較之

甲　　　　　乙
庚　　己　　壬
丙　　丁
庚　　己　　壬
庚　　乙
辛　丁

甲乙方界之四分與丙丁方界之二分相比者不同蓋丙丁四得甲乙十六之四分之一而辛丁二得庚乙四之二分之一以四分比一分較之二分比一分不為二倍乎故欲求其比例相連之率則於甲乙形之界二倍之得八分與丙丁方界二分為比即如甲乙方面積十六與丙丁方面積四分之比矣夫八與十六四與八二與四皆二分之一之比

例而十六隔八與四比八隔四與二比則皆成四分之一之比例故十六與四較之四與二為兩界上連比例隔一位相加之比例也又如甲乙方面之縱橫界為丙丁方面縱橫界之三倍則甲乙方面內如丙丁方面之三倍者有三三其三為九故甲乙之面積比丙丁面積為九倍今甲乙之積為三十六分與丙丁方面積四分相比較之甲乙方界之

甲　乙
庚　壬
丙　丁
庚　己　壬　癸
庚　乙
辛　丁

六分與丙丁方界之二分相比者不同葢丙丁四得甲乙三十六之九分之一而辛丁二得庚乙六之三分之一以九分比一分較之三分比一分不為三倍乎故欲求其比例相連之率則於甲乙形之界三倍之得十八與丙丁方界二分為比即如甲乙方面積三十六與丙丁方面積四之比例矣葢十八與六六與二皆三分之一之比例而三十六隔

十二與四比十八隔六與二比則皆為九分之一之比例故三十六與四較之六與二亦為兩界上連比例隔一位相加之比例也

第六

凡直角方面形有二種一為長方一為正方因其縱橫界之比例各異故其所生之形不同而積不得互相為比也如欲比之必以長方與長方為比正方與

戊　甲

乙　庚

己　丙
丁　辛

正方為比其比例始行如甲乙丙丁兩長方面形其甲乙形之甲戊橫界與丙丁形之丙已橫界為大一倍甲乙形之甲庚縱界與丙丁形之丙辛縱界亦為大一倍其比例相同若以甲乙形之甲戊橫界與丙丁形之丙辛縱界為比則大三倍而甲乙形之甲庚縱界與丙丁形之丙已橫界為比止大一分猶不得大一倍其比例則異故甲乙形所生之

辰　子
丑　午

積為二十四而丙丁形所生之積為六倶為長方形焉又如子丑寅夘兩正方形其子丑形之子辰横界與寅卯形之寅巳横界之比子丑形之子午縱界與寅卯形之寅未縱界之比倶為大三倍而比例相同復以子丑形之子辰横界與寅卯形之寅未縱界為比子丑形之子午縱界與寅卯形之寅巳横界為比亦各大三倍而比例相同故子丑形所

生之積為三十六而寅卯形所生之積為四俱為正方形焉以此四形兩兩相比則甲乙長方形與丙丁長方形為比而子丑正方形與寅卯正方形為比各為相當比例之四方面也

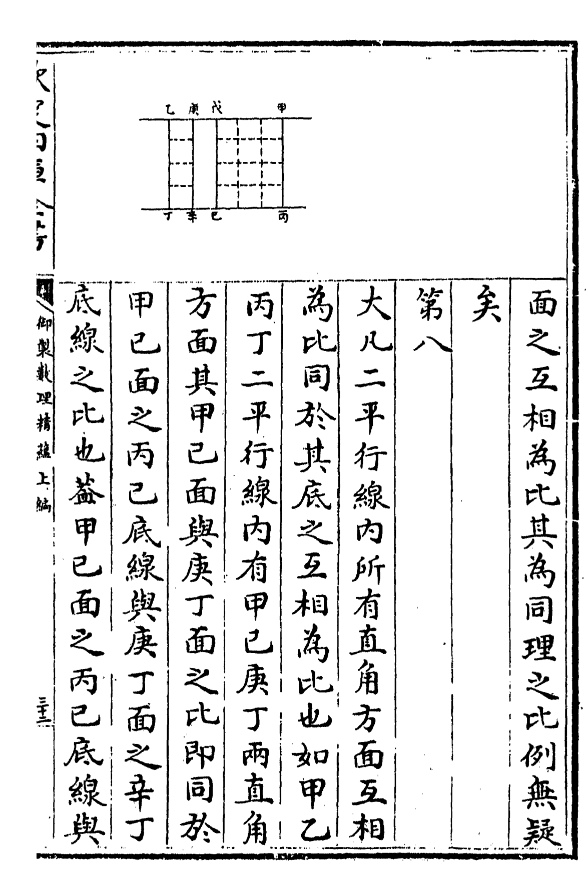
第七

有兩同式長方面於兩形相當之二界各作兩正方面互相為比即同原兩長方面之互相為比也如甲乙丙丁兩直

庚
乙
戊
甲

辛
丁
巳
丙

角長方面在甲戊丙己相當二横界各作甲庚丙辛兩正方面則所作甲庚丙辛兩正方面互相為比即同於原有之甲乙丙丁相同之兩長方面之互相為比也夫甲乙丙丁同式之兩長方面積既為隔一位相加之比例則所作甲庚丙辛同式之正方面積亦必為隔一位相加之比例然則甲乙丙丁原有之兩面互相為比與所作甲庚丙辛之正方

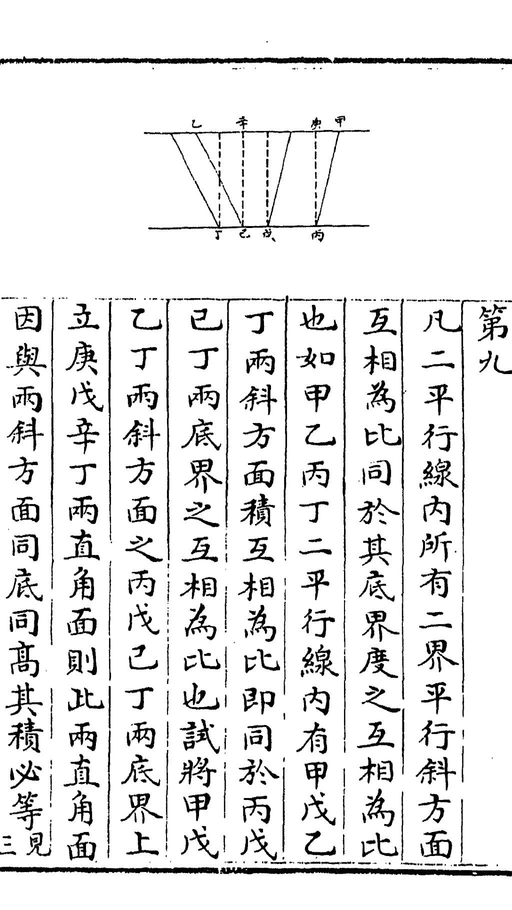


面之互相為比其為同理之比例無疑矣

第八

大凡二平行線內所有直角方面互相為比同於其底之互相為比也如甲乙丙丁二平行線內有甲已庚丁兩直角方面其甲已面與庚丁面之比即同於甲已面之丙已底線與庚丁面之辛丁底線之比也蓋甲已面之丙已底線與

庚丁面之辛丁底線為三倍而甲己面之甲丙縱線與庚丁面之庚辛縱線因同在二平行線内其度固同今以二面縱線俱依庚丁面之庚辛分數分之皆為四倍則甲己面為一十二分而庚丁面為四分矣以甲己面之十二分與庚丁面之四分為比即如甲己面之丙己底三分與庚丁面之辛丁底一分之比故其比例相同也



第九

凡二平行線內所有二界平行斜方面互相為比同於其底界度之互相為比也如甲乙丙丁二平行線內有甲戊乙丁丙斜方面積互相為比即同於丙戊己丁丙底界之互相為比也試將甲戊乙丁丙斜方面之丙戊己丁丙底界上立庚戊辛丁丙直角面則比兩直角面因與兩斜方面同底同高其積必等見三

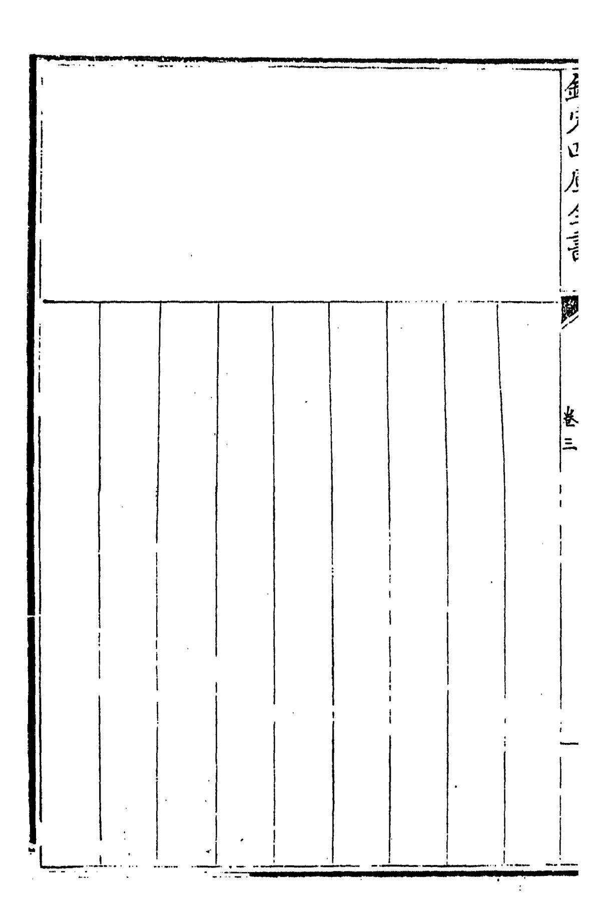
卷第八節前節言凡二平行線內所有直角方面互相為比同於其底之互相為比此甲戊乙丁兩斜方面既與同底所立庚戊辛丁兩直角面相等則甲戊乙丁兩斜方面互相為比必同於丙戊己丁兩底界之互相為比可知矣故凡二平行線內所有面積相比之分數必與底界相比之分數同也

第十

凡二平行線內所有三角形面積互相為比亦同於其底界度之互相為比也如甲乙丙丁二平行線內有戊己庚辛壬癸兩三角形其內所函面積互相為比即同於己庚壬癸兩底界之互相為比也何也凡二平行線內所有三角形得其同底所立四邊形之一半今以甲乙丙丁二平行線內之戊己庚三角形同底立一戊己庚子四邊形辛壬癸三

角形同底立一辛壬癸丑四邊形則戊己庚三角形為戊己庚子四邊形之一半而辛壬癸三角形為辛壬癸丑四邊形之一半如以兩三角形面積互相為比即同於兩四邊形面積之互相為比而為相當比例四率矣其面積既互相為比則其兩三角形面積相比同於兩三角形底之相比者亦如兩四邊形相比同於兩四邊形底之相比矣然則戊

己庚辛壬癸兩三角形面積互相為比必同於己庚壬癸兩底界互相為比者可知也今壬癸底界既比己庚底界大一倍故辛壬癸三角形面積必比戊己庚三角形面積亦大一倍也

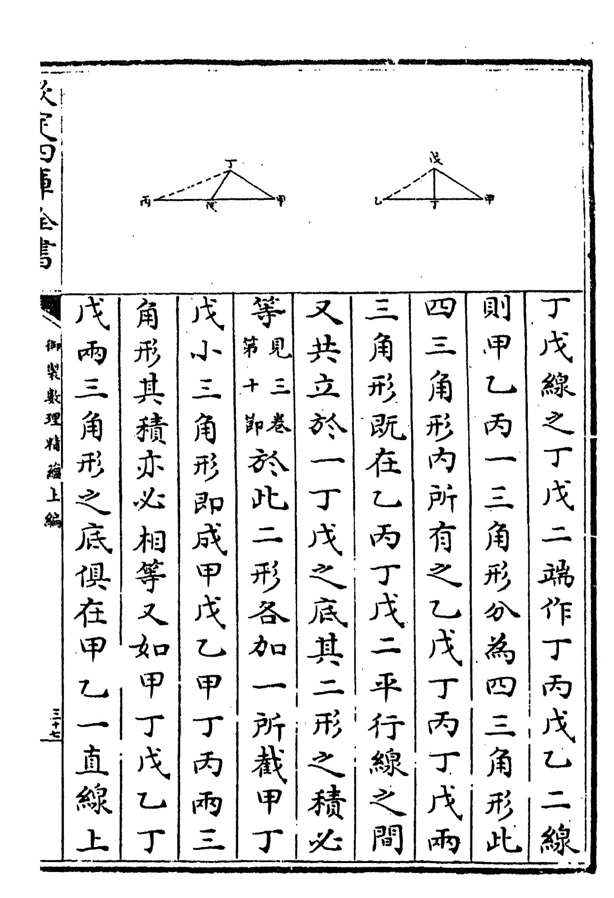

欽定四庫全書
卷三

幾何原本八

第一

凡三角形內與其底線平行作一直線則所截三角形之兩邊線互相為比例線其兩邊線所分各二段互相為比為相當比例四率而每邊所截之一段與本全線比之亦為相當比例四率也如甲乙丙三角形內與乙丙底線平行作一丁戊線則分甲乙一邊為甲丁丁乙

二段分甲丙一邊為甲戊戊丙二段其甲乙一邊之甲丁丁乙二段互相為比甲丙一邊之甲戊戊丙二段互相為比其比例俱同為相當比例四率矣又如甲乙一邊之甲丁一段與本邊甲乙全線為比甲丙一邊之甲戊一段與本邊甲丙全線為比其比例亦俱同為相當比例四率矣今以三角形按所截分分為各式以各式面積互相比者考之自



丁戊線之丁戊二端作丁丙戊乙二線則甲乙丙一三角形分為四三角形此四三角形內所有之乙戊丁丙丁戊兩三角形既在乙丙丁戊二平行線之間又共立於一丁戊之底其二形之積必等（見三卷第十節）於此二形各加一所截甲丁戊小三角形即成甲戊乙甲丁丙兩三角形其積亦必相等又如甲丁戊乙丁戊兩三角形之底俱在甲乙一直線上

而兩三角形之戊角又共在一戊處其兩形必在二平行線之間而甲丁戊丙丁戊兩三角形之底俱在甲丙一直線上而兩三角形之丁角又共在一丁處其兩形亦在二平行線之間（見三卷第十二節）因各三角形兩兩俱為二平行線所限故其面積互相為比必同於其底界之互相為比也（見七卷第十節）此所以甲丁戊丙丁戊兩三角形積互相為比與其甲戊

戊丙兩底線之互相為比同其甲丁戊乙丁戊兩三角形積互相為比與其甲丁丁乙兩底線之互相為比亦同也再甲乙戊三角形之積既與甲丙丁三角形之積相等則以甲乙丙之全形與所分之甲乙戊三角形或與所分之甲丙丁三角形相比其比例必俱相同而甲丙丁三角形之甲丁底與甲丙乙全形之甲乙底互相為比甲乙戊三角形之

甲戊底與甲乙丙全形之甲丙底互相為比亦必俱相同矣因其各三角形得互相為比例故其所截兩邊線兩兩為相當比例率也

第二

凡三角形內與底平行作一直線其所截兩邊線之每一段與各邊全線之比即同於所作線與底線之比也如甲乙丙三角形內與乙丙底平行作一丁戊

線此丁戊線所截甲丁一段與甲乙全線之比甲戊一段與甲丙全線之比皆如丁戊線與乙丙底線之相比也假若將甲乙丙三角形之甲乙邊線為底而與甲乙底線平行作一戊己線即成戊己乙丁四邊長方形其兩兩平行線之度俱各相等然三角形之兩邊與所截之每段既互相為比如前節所云則此乙丙邊之乙己一段與乙丙邊全線之比即

同於彼甲丙邊之甲戊一段與甲丙邊全線之比而丁戊之平行線既與乙巳平行線度相等則此丁戊平行線與原底乙丙線之比亦必同於彼甲丙邊之甲戊一段與甲丙邊全線之比矣故甲戊段為一率甲丙邊全線為二率丁戊平行線為三率乙丙底線為四率為相當比例四率也又如甲乙邊之甲丁一段與甲乙邊全線之比既同於丁戊平

行線與乙丙底線之比則甲丁段為一率甲乙邊全線為二率丁戊平行線為三率乙丙底線為四率亦為相當比例四率也苟甲乙邊全線為六分則甲丁段得其六分之二分乙丙邊全線為六分則丁戊段亦得其六分之二分所以成兩兩相當比例之率也

第三

凡大小兩三角形其相當之二角度若

兩兩相等則其餘一角亦必相等如此類兩三角形謂之同式三角形也雖其內容積分不同而其相當各界互相為比俱為相當比例之率焉如甲乙丙丁戊己大小兩三角形其甲角與丁角等乙角與戊角等則所餘丙角必與己角等而為同式三角形也二卷第三節言凡三角形之三角相併與二直角等則此大小兩三角形之各三角相併亦俱為二直角於二直角中減去大形之甲角乙角餘為丙角減去小形之丁角戊角餘為己角其

所減之數既等則所餘之數亦必等矣　若於大形內與乙丙平行作庚辛線與甲乙平行作辛壬線則成甲庚辛辛壬丙兩小三角形此兩小形之相當角度與大形之相當角度亦必俱等故皆謂之同式形也凡同式之形其容積雖不一而其各界互相為比皆為相當比例之四率是故以大三角形之甲乙全線與所截甲庚一段之比即如大三角形之甲乙一邊與小

三角形之相當丁戊一邊之比也大三角形之甲丙全線與所截甲辛一段之比即如大三角形之甲丙一邊與小三角形之相當丁己一邊之比也大三角形之乙丙底線與所截庚辛底線之比即如大三角形之乙丙底線與小三角形之戊己底線之比也至於甲乙丙大三角形與所截辛壬丙小三角形相當各界之比亦如甲乙丙大三角形與丁

戊己小三角形相當各界之比也由此推之凡同式之形其相當各界互相為比皆為相當比例之率可知矣

第四

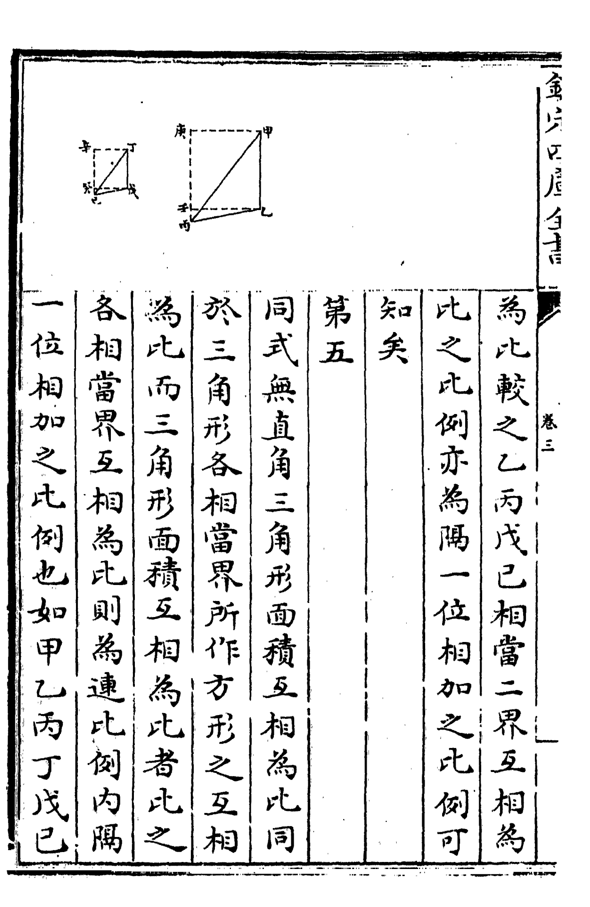
同式直角三角形面積互相為比同於三角形各相當界所作方形之互相為比而同式三角形面積互相為比者比之各相當界互相為比則為連比例內隅一位相加之比例也如甲乙丙丁戊

己丙同式直角三角形其面積互相為比即同於此兩三角形之乙丙戊己相當二界所作庚乙辛戊兩方形互相為比之比例而此兩三角形之面積互相為比比之乙丙戊己相當二界互相為比之比例則為連比例內隔一位相加之比例矣蓋兩三角形之乙戊二角俱為直角若與乙丙戊己二線平行作甲壬丁癸二線又與甲乙丁戊二線平行

作壬丙癸己二線即成壬乙癸戊兩直角長方形此甲乙丙丁戊己兩三角形因與所作壬乙癸戊兩直角長方形在二平行線內同為一底其積為一半將半與半相比者即同於全與全之相比故甲乙丙丁戊己兩三角形互相為比必同於壬乙癸戊兩直角長方形互相為比之比例矣夫依乙丙戊己甲乙丁戊各相當二界所作壬乙癸戊兩長方

形互相為比之比例既與甲乙丙丁戊己兩三角形互相為比之比例同則依乙丙戊己相當二界所作庚乙辛戊兩正方形互相為比之比例亦與壬乙癸戊兩長方形與甲乙丙丁戊己兩三角形互相為比之比例同矣又凡直角兩方形其兩界互相為比之比例若俱同則兩形面積互相為比之比例較之兩界互相為比之比例為隅一位相加之

比例（見七卷第五節）令甲乙丙丁戊己兩三角形之各依底線所作正方形互相為比較之二底線互相為比之比例即為隅一位相加之比例夫甲乙丙丁戊己兩三角形之面積互相為比者既與所作庚乙辛戊兩正方形面積互相為比之比例同則此所作兩正方形面積相比較之兩底相比為隅一位相加之比例而甲乙丙丁戊己兩三角形面積互相



為比較之乙丙戊己相當二界互相為比之比例亦為隅一位相加之比例可知矣

第五

同式無直角三角形面積互相為比同於三角形各相當界所作方形之互相為比而三角形面積互相為比者比之各相當界互相為比則為連比例內隅一位相加之比例也如甲乙丙丁戊己

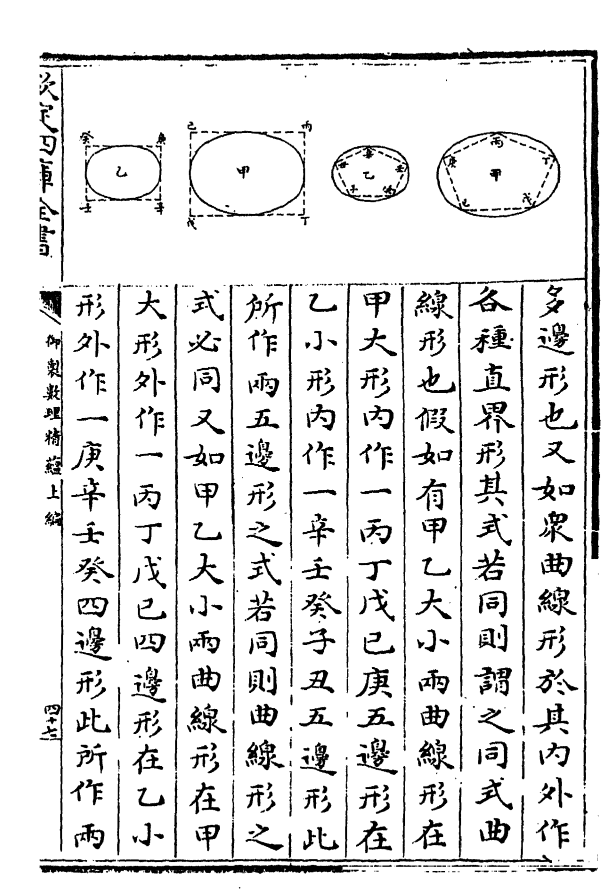
兩同式三角形雖無直角然其相當各角俱等則此兩形面積互相為比同於在此兩形之甲乙丁戊相當二界所作方形互相為比之比例而兩形之面積互相為比者比之甲乙丁戊相當二界互相為比之比例則為連比例內隔一位相加之比例矣試自兩形之丙己二角與甲乙丁戊二界平行作丙庚己辛各一線又自甲丁二角至庚辛二線之

末作甲庚丁辛二線又與此二線平行自乙戊二角至壬癸二處作乙壬戊癸二線成庚乙辛戊兩直角長方形此兩長方形與甲乙丙丁戊己兩三角形俱在兩平行線内又同為一底則此兩三角形面積為彼庚乙辛戊兩長方形之一半將半與半相比者同於全與全之相比故甲乙丙丁戊己兩三角形面積之比例必同於庚乙辛戊兩長方形之

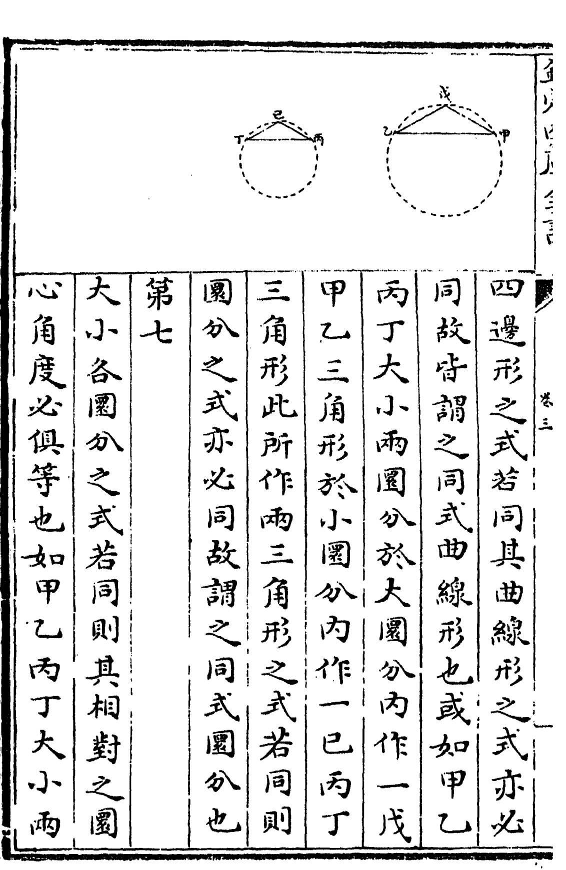
比例矣夫同式兩長方形之比例同於相當界所立正方形之比例而同式正方形之比例比之各相當界之比例為連比例隅一位相加之比例今此兩三角形面積之比例既同於庚乙辛戊兩長方之比例亦必同於兩正方之比例則兩三角形面積之比例比之兩界之比例為連比例隅一位相加之比例可知矣

第六

有衆多邊形其邊數同相當各角俱等而相當界之比例又同則謂之同式形也如有甲乙丙丁戊己庚辛壬癸大小兩多邊形其邊數俱為五其相當甲己二角乙庚二角丙辛二角丁壬二角戊癸二角各度俱等而甲乙邊與己庚邊之比即同於乙丙邊與庚辛邊之比其相當邊互相比之俱同者即謂之同式



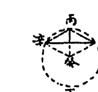
多邊形也又如衆曲線形於其内外作各種直界形其式若同則謂之同式曲線形也假如有甲乙大小兩曲線形在甲大形内作一丙丁戊己庚五邊形在乙小形内作一辛壬癸子丑五邊形此所作兩五邊形之式若同則曲線形之式必同又如甲乙大小兩曲線形在甲大形外作一丙丁戊己四邊形在乙小形外作一庚辛壬癸四邊形此所作兩

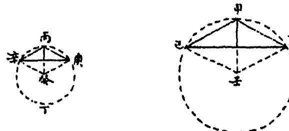


四邊形之式若同其曲線形之式亦必同故皆謂之同式曲線形也或如甲乙丙丁大小兩圜分於大圜分內作一戊甲乙三角形於小圜分內作一巳丙丁三角形此所作兩三角形之式若同則圜分之式亦必同故謂之同式圜分也

第七

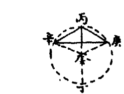
大小各圜分之式若同則其相對之圜心角度必俱等也如甲乙丙丁大小兩





圜之戊甲己庚丙辛兩分之式相同其弧雖隨圜之大小各殊而自圜所分之度必同其各段所對二圜之壬癸心角度亦等矣夫戊甲己與庚丙辛兩段式既同則此內所函甲戊己丙庚辛兩三角形之甲丙相當兩界角之度必等若自甲丙二角過二圜心壬癸至對界乙丁作甲壬乙丙癸丁二線則成兩界角與兩心角蓋心角大於界角一倍故甲

乙大圜之戊壬乙心角比戊甲乙界角
大一倍乙壬己心角比乙甲己界角大
一倍今將戊壬乙乙壬己兩心角併之
戊甲乙乙甲己兩界角併之則所併之
心角亦必比所併之界角大一倍矣而
丙丁小圜之庚癸丁丁癸辛兩心角併
之亦必比庚丙丁丁丙辛所併之兩界
角大一倍夫兩圜之兩界角度既等而
兩圜之所併之心角度又等則兩界角

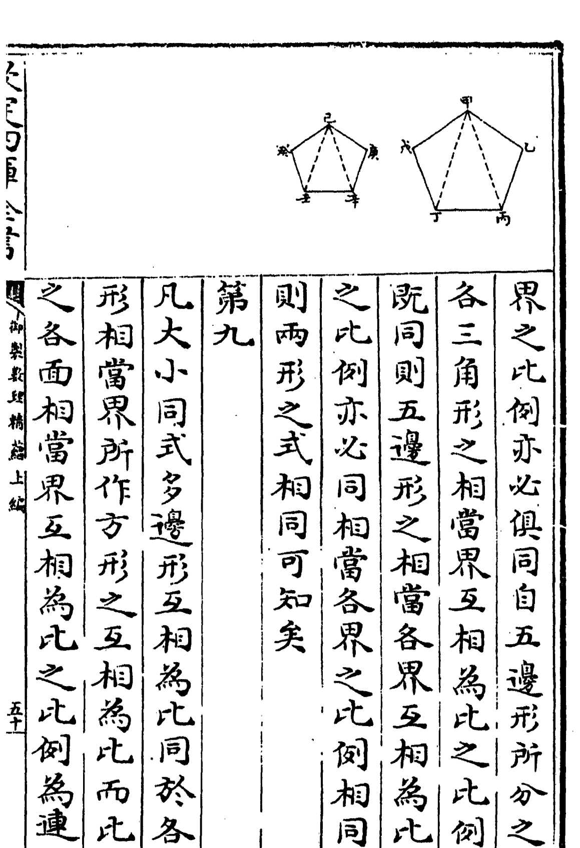


相對之戊乙己庚丁辛兩弧段之分數亦必相等界角所對之弧分既等則心角所對之弧分亦必相等心角所對之弧分即為甲丙二界角相對之壬癸二心角之度也

第八

凡大小同式多邊形分為衆三角形其相當三角形之式俱相同也如甲乙丙丁戊己庚辛壬癸兩同式五邊形自大

形甲角至丙丁二角自小形巳角至辛壬二角各作二線則大形分為甲乙丙甲丙丁甲丁戊三三角形小形分為巳庚辛巳辛壬巳壬癸三三角形而甲乙丙之形與相當巳庚辛之形同式甲丙丁之形與相當巳辛壬之形同式甲丁戊之形與相當巳壬癸之形同式因其所分各三角形俱為同式故相當各角度必等相當各角度既等則其相當各



界之比例亦必俱同自五邊形所分之各三角形之相當界互相為比之比例既同則五邊形之相當各界互相為比之比例亦必同相當各界之比例相同則兩形之式相同可知矣

第九

凡大小同式多邊形互相為比同於各形相當界所作方形之互相為比而比之各面相當界互相為比之比例為連

比例隅一位相加之比例也如甲乙丙丁戊己庚辛壬癸兩同式五邊形於大形之丙丁界小形之辛壬界各作子丙丑辛大小兩方形其大小五邊形互相為比必同於所作子丙丑辛大小二方形之互相為比大小五邊形既同於大小兩方形之互相為比則比之丙丁辛壬相當二界互相為比之比例為連比例隅一位相加之比例矣若將甲乙丙

丑　壬　辛

子　丁　丙

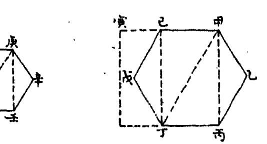
丁戊己庚辛壬癸兩形分為衆三角形則相當各三角形之式必同相當各三角形之式既同則相當各三角形互相為比即同於在三角形各相當界所作方形之互相為比而各三角形面積之互相為比較之各相當界互相為比之比例亦為連比例隔一位相加之比例夫所分衆三角形互相為比既同於所作方形之互相為比則衆三角形所合

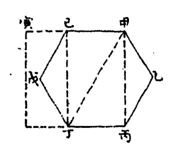
甲乙丙丁戊己庚辛壬癸之大小五邊形互相當形互相為比亦必同於丙丁辛壬相當界所作子丙丑辛大小兩方形之互相為比而比之丙丁辛壬相當界互相為比之比倒為連比例隅一位相加之比例可知矣

第十

凡大小同式直界形互相為比同於在所比各形內外所有同式形之各相當

界所作正方形之互相為比也如甲乙丙丁戊己庚辛壬癸子丑大小兩直界形於此二形內所函之甲丙丁己庚壬癸丑二同式四邊形之甲丙庚壬相當二界作寅丙卯壬正方形則兩直界形互相為比即同於兩正方形之互相為比也若將甲乙丙丁戊己庚辛壬癸子丑兩六邊形俱分為三角形則其相當各三角形之式俱相同而相當各三角



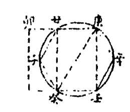


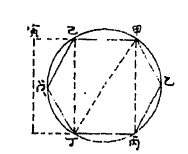
形互相為比必同於甲丙庚壬相當二界所作寅丙卯壬正方形之互相為比矣此所分三角形之比例既同於所作正方形之比例則大小兩形內各三角形之甲丙庚壬界又為兩四邊形之共界兩甲乙丙丁戊己庚辛壬癸子丑兩同式形互相為比亦必同於其所函之甲丙丁己庚壬癸丑兩四邊形之甲丙庚壬兩相當界所作寅丙卯壬兩正方

形之互相為比可知矣

第十一

凡大小同式曲界形互相為比同於在所比各形內外所有同式形之各相當界所作正方形之互相為比也如甲乙丙丁戊己庚辛壬癸子丑大小二圜此二圜之中雖各函一同式六邊形各函一同式四邊形又各函衆同式三角形此大小二圜之積互相為比必同於在





圜內所函同式形之甲丙庚壬相當二界所作寅丙卯壬正方形之互相為比也大凡衆界形或函圜或函於圜其界數愈多愈與圜界相近而圜界分為千萬段即成千萬直界形見四卷第十九二十等節則大小兩圜之比例固與內函相當直界形之比例等矣夫相當直界形之比例原同於兩形之相當界所作方形之比例而圜界形之比例又同於相當直界

形之比例則此大小二圜互相為比之比例同於此二圜之輻線或徑線所作正方形互相為比之比例可知矣

第十二

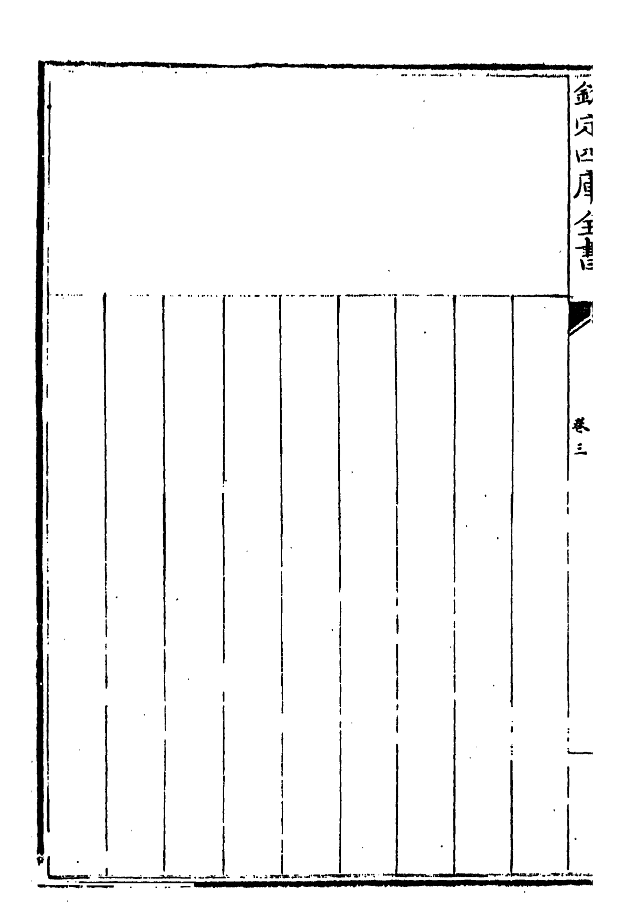
凡圓面徑與㯄圓面一名鴨蛋形高度等者其面積互相為比之比例即同於函兩形各作切方形互相為比之比例而圓形面積與㯄圓形面積互相為比之比例又同於圓形徑與㯄圓形小徑互相

為比之比例也如子壬寅癸之圓面子丑寅卯之橢圓面其子寅高度俱同圓徑即橢圓大徑其面積互相為比之比例必同於圓面外所作切圓戊己庚辛正方形與橢圓面外所作切圓甲乙丙丁長方形互相為比之比例而子壬寅癸圓面與子丑寅卯橢圓面互相為比之比例又同於圓面之壬癸徑與橢圓面之丑卯小徑互相為比之比例也葢平行線

內兩面形互相為比之比例同於其底界互相為比之比例（見七卷第八節）令戊己庚辛正方形與甲乙丙丁長方形皆在戊辛己庚平行線內故戊己庚辛正方形與甲乙丙丁長方形互相為比之比例同於己庚底與乙丙底互相為比之比例而子壬寅癸圜面與子丑寅卯橢圓面亦在戊辛己庚平行線內則子壬寅癸圜面與子丑寅卯橢圓面互相為比

之比例必同於戊己庚辛正方形與甲乙丙丁長方形互相為比之比例矣然戊己庚辛正方形之己庚底即圓面壬癸徑度而甲乙丙丁長方形之乙丙底又即橢圓面之丑卯徑度也夫平圓與橢圓之比例既同於正方形與長方形之比例而正方形與長方形之比例又同於己庚底與乙丙底之比例則圓面與橢圓面之比例同於圓面之壬癸徑

與楕圓面之丑卯徑之比例可知矣



幾何原本九

第一

凡直角三角形自直角至相對界作一垂線則一形分為兩形與原形共為三同式直角三角形而其比例俱相同也

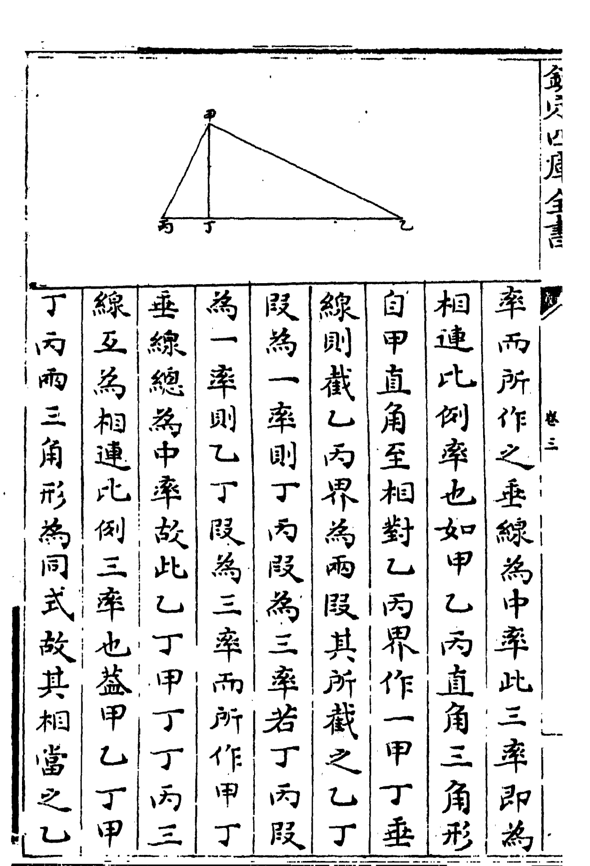
如甲乙丙直角三角形自甲直角至相對乙丙界作一甲丁垂線則甲乙丙一形分為甲丁乙甲丁丙兩形此所分兩形與原有甲乙丙形之式俱相同而皆

為直角三角形其三形每相當各界之比例亦俱相同也葢甲丁線既為垂線則兩傍所分甲丁乙甲丁丙二角必俱為直角（見首卷第十節）是故甲乙丙三角形之甲角甲丁乙三角形之丁角其度相等而兩三角形又共一乙角其相當二角度既等則所餘各一角度自等（見八卷第三節）故甲乙丙之丙角與甲丁乙之甲角其度相等也而甲乙丙之甲角亦與甲丁

丙之丁角相等此兩三角形又共一丙角故所餘之甲乙丙之乙角與甲丁丙之甲角其度亦等三三角形之每相當各角之度既等則三三角形之式必同三三角形之式既同則其每相當各界之比例亦俱相同可知矣

第八

凡直角三角形自直角至相對界作一垂線則所截之兩段一為一率一為三

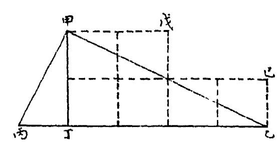


率兩所作之垂線為中率此三率即為相連比例率也如甲乙丙直角三角形自甲直角至相對乙丙界作一甲丁垂線則截乙丙界為兩段其所截之乙丁段為一率則丁丙段為三率若丁丙段為一率則乙丁段為三率兩所作甲丁垂線總為中率故此乙丁甲丁丁丙三線互為相連比例三率也蓋甲乙丁甲丁丙兩三角形為同式故其相當之乙

丁甲丁二界互相為比即同於甲丁丁丙二界之互相為比也令以乙丁線為四分丁丙線為一分則甲丁線必得二分因四分與二分之比必同於二分與一分之比故為相連比例三率也

第三

直角三角形自直角至相對界所作垂線與所分二段固為相連比例三率如依垂線度作一方形則與所分二段一



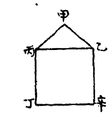
為寛度一為長度所作長方形之積相等也如甲乙丙直角三角形自甲直角至相對乙丙界作一甲丁垂線截乙丙界為兩段遂成乙丁甲丁丁丙之連比例三率今依甲丁垂線度作一戊丁正方形（即為中率自乘之數）以甲丁垂線所截丁丙一段為寛度乙丁一段為長度作一已丁長方形（即為首率末率相乘之數）其戊丁正方形之積必與已丁長方形之積相等也何

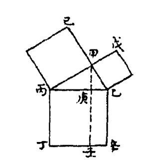
也葢同式兩三角之相當界互相為比之比例同故此乙丁界與甲丁界之比即同於甲丁界與丙丁界之比乙丁線既為一率則甲丁線為二率甲丁線復為三率則丙丁線為四率然則此相連比例三率又為相當比例四率矣因其可為相當比例四率故二率與三率相乘一率與四率相乘所得之分數相同見七卷第四節今既以甲丁為二率又為三率

則甲丁自乘之數即是二率三率相乘之數而乙丁一率與丙丁三率相乘所得己丁長方形即與甲丁二率三率自乘之正方相等可知矣此乃首率末率求中率之法也要之首率末率相乘中率相乘中率相乘者中率自乘或二率三率相乘俱在首率末率之中故云其所乘之二式雖異因俱自相連比例四率而生故其積相等而得以為準也

第四

凡有直角三角形其直角相對界所作方形之積必與兩傍界所作兩方形之積相等也如甲乙丙直角三角形其甲直角相對乙丙界作一乙丁方形其積必與甲乙甲丙之兩傍線所作戊乙已丙兩方形之積相等也試自甲直角過相對乙丙界至方形辛丁界作一甲庚壬垂線則甲乙丙三角形分為甲乙庚





甲庚丙兩三角形而乙丁正方形分為乙壬庚丁兩長方形此所分甲乙庚甲庚丙兩三角形與甲乙丙原三角形為同式則其每相當界之互相比例必同矣是以甲庚丙小三角形之庚丙小界與丙甲大界之比即同於甲乙丙大三角形之甲丙小界與乙丙大界之比而為相當比例四率也然丙甲甲丙之二率三率原為一線則庚丙丙甲乙丙又

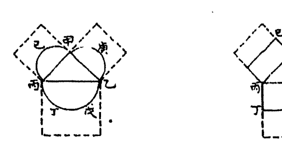
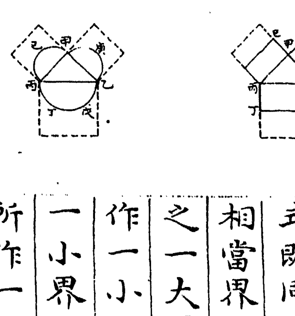
為相連比例三率矣故丙甲中率所作巳丙方形之積與庚丙一率為寬乙丙三率為長所作庚丁長方形之積相等也乙丁既為正方形則庚壬度必與方界乙丙各度等故庚丁長方即同庚丙為寬乙丙為長所作之長方也又如甲乙庚甲乙丙兩三角之乙庚甲乙乙甲乙丙四界為相當比例四率又為相連比例三率故甲乙中率所作戊乙方形

之積亦與乙庚一率為寬乙丙三率為長所作乙壬長方形之積相等也令庚丁乙壬之兩長方形既與已丙戊乙兩正方形等則兩形相合之乙丁正方形亦必與已丙戊乙兩正方形相等可知矣

第五

凡直角三角形之三界所作同式三形其一大界所作一形之積必與二小界

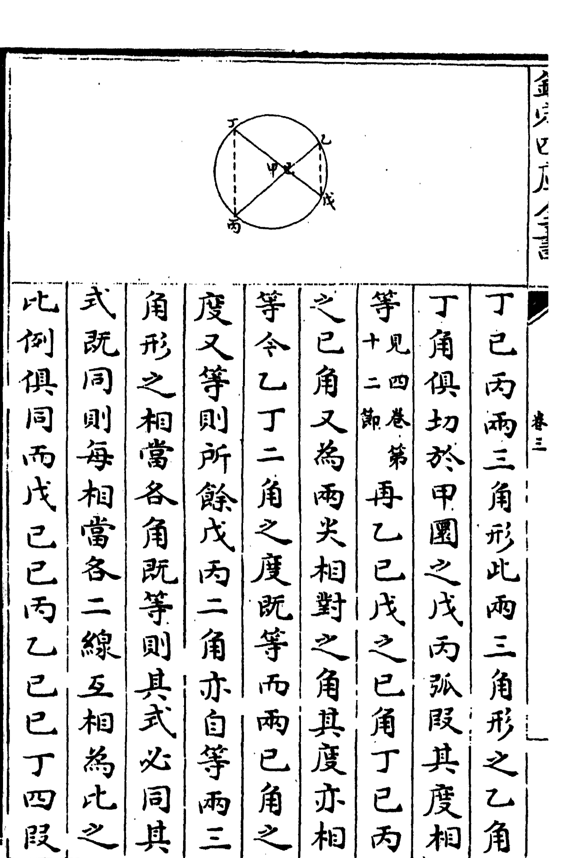
所作二形之積等也如在甲乙丙直角三角形之乙丙甲乙甲丙三界作乙丁戊乙已丙三同式長方形則乙丙大界所作乙丁一形之積必與甲乙甲丙二小界所作戊乙已丙二形之積等也又或如甲乙丙直角三角形於乙丙大界作乙戊丁丙一半圜於甲乙甲丙二小界作甲庚乙甲已丙二半圜則乙丙大界所作乙戊丁丙一半圜之積必與甲

乙甲丙二小界所作甲庚乙甲己丙二半圜之積等也葢依三界所作三形之式既同故同式衆形互相為比即同於相當界所作正方形之互相為比也要之一大界所作一大形内減一小界所作一小形即餘一小界所作一小形両一小界所作一小形内再加入一小界所作一小形則為一大界所作一大形矣

第六

一圜之内二經線相交所截之段遞轉比之其比例俱同兩為相當比例四率也如甲圜内乙丙丁戊二經線相交於己其所截之戊己一段與己丙一段之比例即同於乙己一段與己丁一段之比例故戊己己丙乙己己丁四段為相當比例之四率也何以見之若自乙至戊自丁至丙復作二經線即成乙己戊

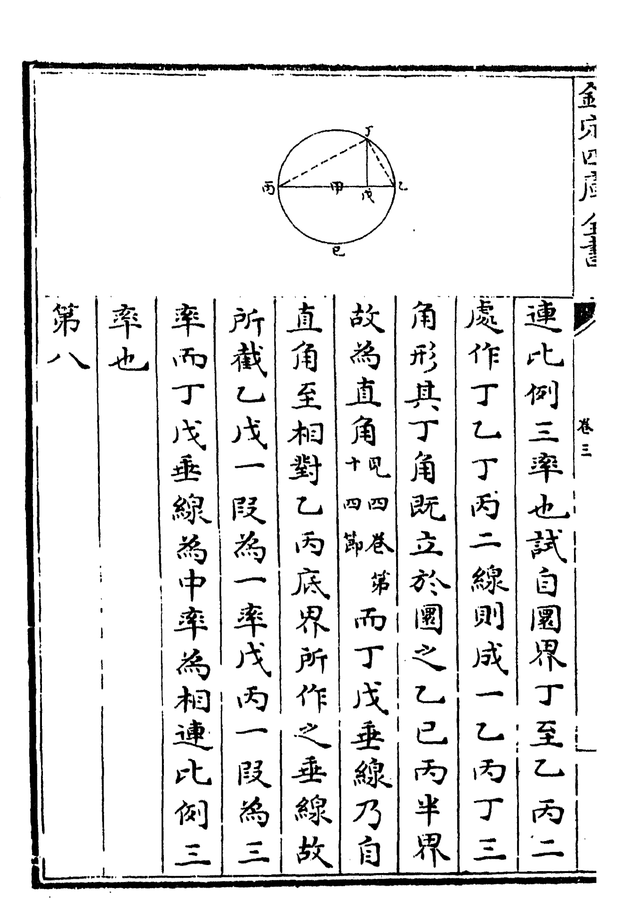


丁己丙兩三角形此兩三角形之乙角丁角俱切於甲圜之戊丙弧段其度相等（見四卷第十二節）再乙己戊之己角丁己丙之己角又為兩尖相對之角其度亦相等令乙丁二角之度既等而兩己角之度又等則所餘戊丙二角亦自等兩三角形之相當各角既等則其式必同其式既同則每相當各二線互相為比之比例俱同而戊己己丙乙己己丁四段

互相為比例四率可知矣

第七

圜之徑線不拘何處作一垂線則所截之兩段一為一率一為三率而垂線為中率即為相連比例三率也如甲圜自丁界至乙丙徑線戊處作一丁戊垂線將乙丙徑線截為兩段其所截乙戊一段為一率戊丙一段為三率而丁戊垂線為中率比乙戊丁戊戊丙三線為相

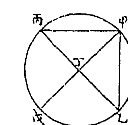


連比例三率也試自圜界丁至乙丙二處作丁乙丁丙二線則成一乙丙丁三角形其丁角既立於圜之乙己丙半界故為直角（見四卷第十四節）丙丁戊垂線乃自直角至相對乙丙底界所作之垂線故所截乙戊一段為一率戊丙一段為三率丙丁戊垂線為中率為相連比例三率也

第八

自圜外一點過圜界二處至相對界作二線以此兩全線互相為比即同於圜界外所截之二段遞轉為比之比例而為相當比例四率也如己圜自圜外甲點過圜界乙丁二處至相對界丙戊二處作二線則甲丙甲戊兩全線互相為比必同於圜界外所截甲乙甲丁二段之遞轉相比而為相當比例四率也試自圜界乙丁二處至相對界丙戊二處

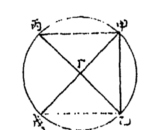
作乙戊丁丙二線則成甲丙丁甲戊乙兩三角形此兩三角形之丙戊二角既切於一圜之乙丁弧界其二角之度必等見四卷第十二節再甲丙丁之甲角甲戊乙之甲角既共為一角其度自等兩三角形各二角度俱等則兩三角形必為同式矣故甲丙甲戊相當二界互相為比之比例即同於甲丁甲乙相當二界互相為比之比例是以甲丙與甲戊之比



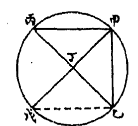
同於甲丁與甲乙之比將甲丙全線為一率甲戊全線為二率甲乙甲丁遞轉移之丙以甲丁一段為三率甲乙一段為四率為相當比例之四率也

第九

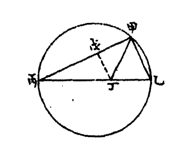
凡函於圜內之三角形以其一角平分為二過相對底界至相對界作一直線則所分角之小邊線與所作線之在三角形內一段之比即同於所作線之全



分與所分角之大邊線之比也如函於圜内有甲乙丙三角形以甲角平分為二分過所對乙丙底界至相對界作一直線即戊甲丁戊一全線以三角形之甲乙小邊與所作甲丁戊線之甲丁一段之比即同於所作甲丁戊全線與三角形之甲丙大邊之比也何以言之若自圜界乙至戊作乙戊弦線即成甲乙戊甲丁丙兩三角形此兩三角形之戊

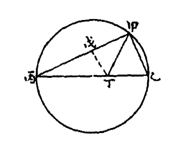


丙二角俱切於圜界甲乙弧之一段其度必等丙甲乙戊三角形之甲角甲丁丙三角形之甲角又為一角所平分之兩角其度亦必等因此兩三角形各二角之度等故兩形為同式兩三角形之式既同則兩形之相當二界互相為比之比例俱同是以甲乙小分與甲丁小分之比即同於甲戊大分與甲丙大分之比也



第十

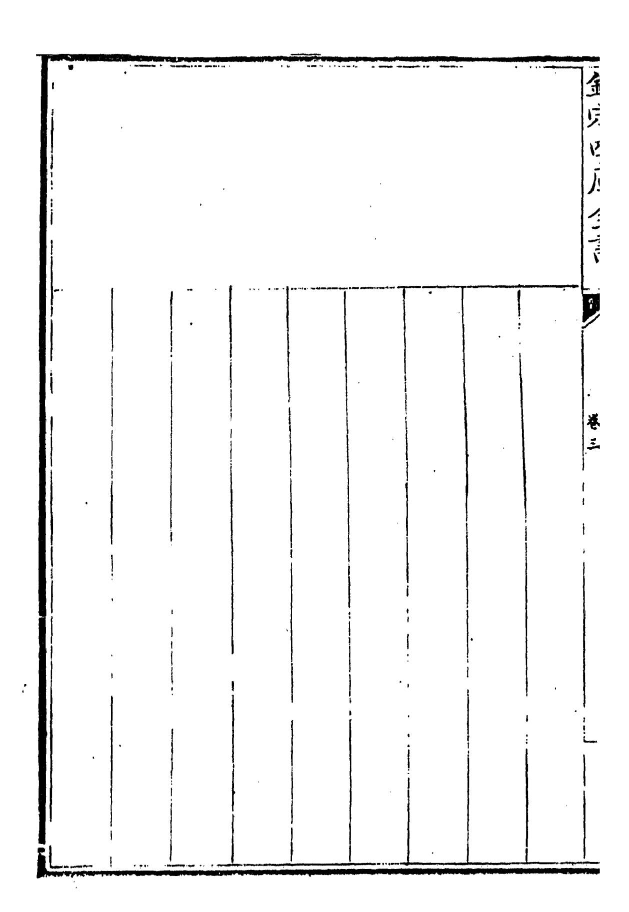
凡函於圜內之三角形以其一角為兩平分自角至底作一線則所分底線兩段互相為比即同於所分角之兩傍兩邊線之互相為比也如函於圜內有甲乙丙三角形以甲角平分為二分至乙丙底作甲丁一線則分一丙底線為乙丁丁丙兩段以乙丁與丁丙之比即同於以甲乙小邊線與甲丙大邊線之比



也試自所分底線之丁至甲丙線與甲乙平行作丁戊一線即成戊丁丙一小三角形蓋甲乙丙大三角形之乙角戊丁丙小三角形之丁角既為乙甲丁戊平行線一邊之內外角其度必等見首卷第二十三節兩甲乙丙戊丁丙兩三角形又共一丙角故此兩三角形之各二角度等為同式兩三角形也再甲丁戊之丁角乙甲丁之甲角因為平行線內二尖交

錯之角其度亦等然則乙甲丁之甲角既為甲乙丙之甲角之兩平分則甲丁戊之丁角亦與甲丁戊之甲角度等矣甲丁戊三角形之丁角甲角既等則二角所對之丁戊甲戊二線亦必等矣甲乙丙戊丁丙兩三角形既為同式而三角之度又俱等則其甲乙丙大三角形之甲乙甲丙二線互相為比即同於戊丁丙小三角形之戊丁戊丙二線互相

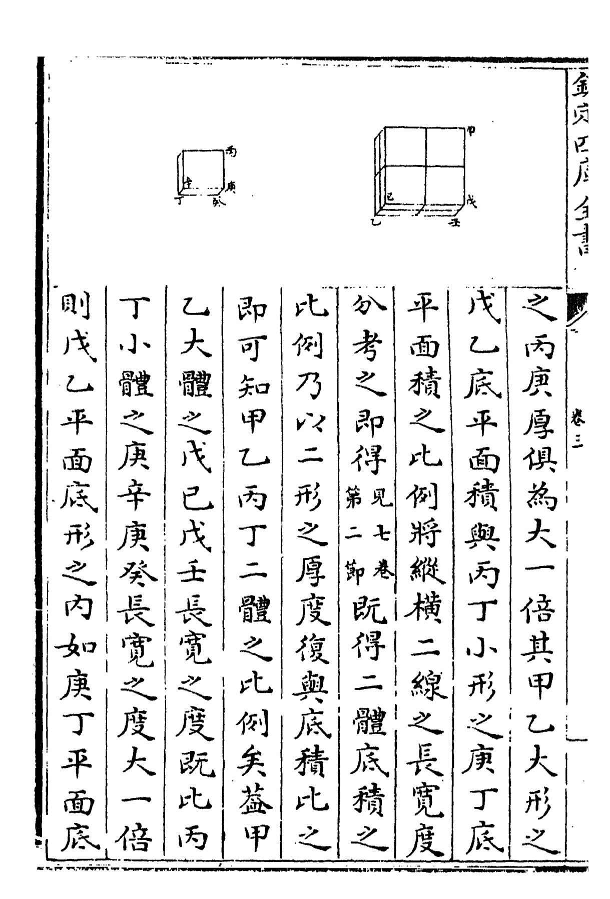
為比之比例也今戊丁甲戊二線其度既等則甲乙線與甲丙線之比又同於以甲戊線與戊丙線之比至於丁戊平行線所截乙丁一段與丁丙一段之比則又同於甲戊一段與戊丙一段之比矣是故甲乙線與甲丙線之比為同於乙丁線與丁丙線之比也



幾何原本十

第一

大凡直角立方體積皆生於面線互乘之度故欲知方體所生比例之分將所比形之長寬與厚詳較之即可得而知矣如甲乙丙丁直角立方二體其甲乙大形之戊己長比丙丁小形之庚辛長甲乙大形之戊壬寬比丙丁小形之庚癸寬甲乙大形之甲戊厚比丙丁小形



之丙庚厚俱為大一倍其甲乙大形之戊乙底平面積與丙丁小形之庚丁底平面積之比例將縱橫二線之長寛度分考之即得（見七卷第二節）既得二體底積之比例乃以二形之厚度復與底積比之即可知甲乙丙丁二體之比例矣葢甲乙大體之戊己戊壬長寛之度既比丙丁小體之庚辛庚癸長寛之度大一倍則戊乙平面底形之内如庚丁平面底

形二倍者有二矣然則甲乙大形甲戊之厚度既比丙丁小形丙庚之厚度大一倍則甲乙體形之內如丙丁體形四倍者有二可知矣是故欲知直角方體之比例以本體之長寬與厚互相比例以較之即得直角方體互相為比之比例也

第二

有兩直角長方體若將此一體之底度

與他一體之底度又將他一體之厚度與此一體之厚度為比其比例若同則此二體之積必等也如甲乙丙丁兩直角長方體甲乙體之戊乙底度比丙丁體之庚丁底度大一倍而丙丁體之丙庚厚度比甲乙體之甲戊厚度亦大一倍則甲乙丙丁二體之積必相等是故兩體之底積與厚度相較則兩體之積可知矣蓋體積之比例視其面線令兩

體之底面厚度交互相等如此其體積不得不等也

第三

有兩直角方體其底面積之縱橫二界相比之比例與厚度面積之縱橫二界相比之比例若俱同則此兩體為直角正方同式體也如甲乙丙丁兩直角方體其甲乙體之戊乙底面之戊己橫界比丙丁體之庚丁底面之庚辛橫界大

一倍甲乙體之戊乙底面之戊壬縱界比丙丁體之庚丁底面之庚癸縱界大一倍甲乙體之甲己厚面之甲戊直界比丙丁體之丙辛厚面之丙庚直界亦大一倍則甲乙丙丁之兩體俱為直角正方同式體也至於兩體所有之戊己庚辛二界戊壬庚癸二界甲戊丙庚二界俱為相當之界而可互相為比例矣

第四

凡同式直角正方體其體積之比例比之兩界線之比例為連比例隅二位相加之比例也如甲乙丙丁兩同式直角正方體其相當之戊巳庚辛二界戊壬庚癸二界甲戊丙庚二界互相為比之比例俱各大一倍則此甲乙體積與丙丁體積之比比之甲乙體之界線與丙丁體之界線之比者即如連比例四率內隅二位相加之比例矣葢甲乙體之

各界既為丙丁體之各界之二倍則甲乙體内如丙丁體之二倍者有四二其四為八故甲乙體積比丙丁體積大八倍夫以甲乙體積八與丙丁體積一相比為八分之一甲乙體界二與丙丁體界一相比為二分之一其比例不同蓋以八分比一分較之二分比一分為四倍也如欲求其相連比例之率則於甲乙體之界四倍之得八分與丙丁體界

一分為比即如甲乙體積與丙丁體積之比例矣夫八與四四與二二與一皆為連比例二分之一之比例今以八與一為比其間隅四與二之兩位故曰同式兩體積之比例為兩界上連比例隅二位相加之比例也若邊為三倍則兩體為九倍體為二十七倍亦為隅二位相加之比例也

第五

有兩同式直角長方體於兩體相當之

二界各作兩正方體互相為比即同於原兩長方體之互相為比也如甲乙丙丁兩直角長方體在戊乙己丁相當二橫界各作甲庚丙辛二正方體則所作之甲庚丙辛兩正方體互相為比之比例仍同於原有之甲乙丙丁兩長方體互相為比之比例也夫甲乙丙丁同式之兩長方體既為隅二位相加之比例則所作甲庚丙辛同式之兩正方體亦

甲

乙

必為隅二位相加之比例矣然則原有之甲乙長方體為原有之丙丁長方體之八分之一其所作甲庚正方體亦為所作丙辛正方體之八分之一可知矣

第六

凡有大小平面體其相當角度俱等而相當界之比例又同則謂之同式體也

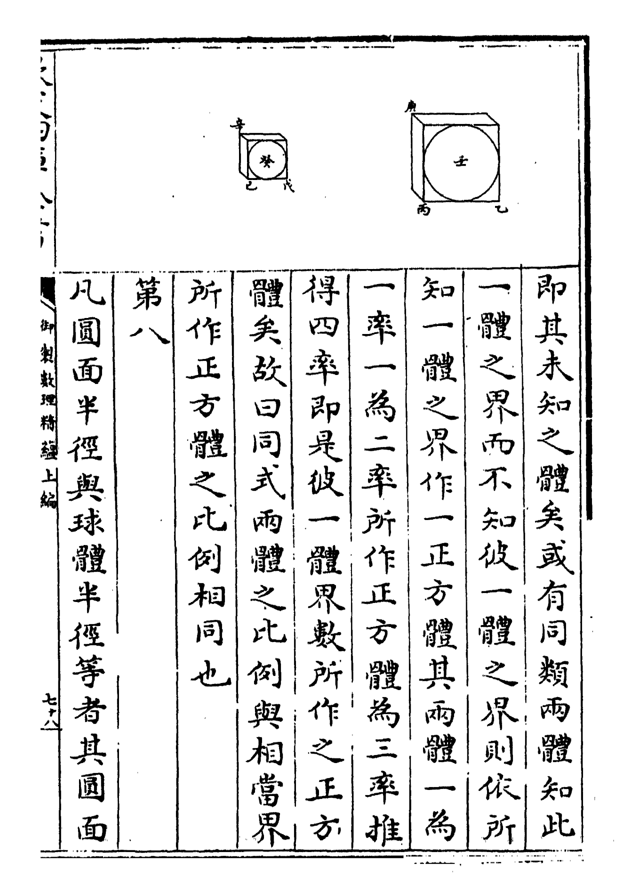
如甲乙大小兩平面體其相當各界之度俱等而相當各界之比例又同則甲

乙二體謂之同式平面正方體也如丙丁大小兩四瓣體其相當各角之度俱等而相當各界之比例又同則丙丁二體謂之同式四瓣體也又如大小圓面體於其內外作各種平面體其平面體之式若同則圓面體亦謂之同式體如戊巳大小兩圓體所函之庚辛尖瓣等體是也

第七

同式各種體之比例同於在各體相當界所作正方體之比例也如甲乙丙丁戊己大小兩三角尖瓣體互相為比即同於乙丙戊己相當二界所作庚乙辛戊兩正方體之互相為比又如壬癸兩圓球體其互相為比之比例亦同於圓球徑相當之乙丙戊己二界所作庚乙辛戊兩正方體互相為比之比例也蓋同式平面形互相為比之比例同於各

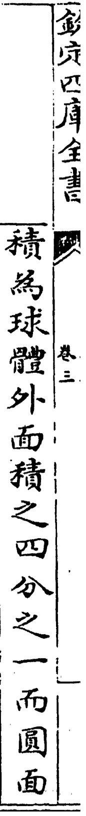
相當二界所作正方面形互相為比之比例矣今各種體之式既同故具相當面互相為比之比例必同相當面互相為比之比例同者緣相當面之各相當界互相為比之比例同也故凡同類兩體知此一體之度而不知彼一體之度欲求知之則在同式兩體相當二界各作一正方體此所作之二體一為一率一為二率所知之體為三率推得四率



即其未知之體矣或有同類兩體知此一體之界而不知彼一體之界則依所知一體之界作一正方體其兩體一為一率一為二率所作正方體為三率推得四率即是彼一體界數所作之正方體矣故曰同式兩體之比例與相當界所作正方體之比例相同也

第八

凡圓面半徑與球體半徑等者其圓面



積為球體外面積之四分之一而圓面半徑與球體全徑等者其圓面積與球體外面積等也如丁己圓面之丁戊半徑與甲丙球體之甲乙半徑等則丁己圓面積為甲丙球體外面積之四分之一又如庚壬圓面之庚辛半徑與甲丙球體之甲丙全徑等則庚壬圓面積與甲丙球體外面積等也試作子寅卯一尖圓體使其寅辰卯之底面積與甲丙

球體外面積等其子丑高度與甲丙球體之甲乙半徑等則此尖圓體積與球體積相等（見五卷第二十五節）又作午未申一小尖圓體使其未申底徑與甲丙球體之全徑等亦與大尖圓體之寅丑半徑等其午酉高度與甲丙球體之甲乙半徑等亦與大尖圓體之子丑高度等則此小尖圓體積為球體積之四分之一亦即為大尖圓體積之四分之一何以見

之蓋大小兩面之比例同於相當界所
生連比例隅一位加一倍之比例令大
尖圓體之寅卯底徑比小尖圓體之未
申底徑大一倍則大尖圓體底積比小
尖圓體底積必又大一倍則小尖圓體
底積為大尖圓體底積之四分之一矣
又兩體同高者其體積之比例同於其
底面之比例今小尖圓體底積既為大
尖圓體底積之四分之一則其體積必

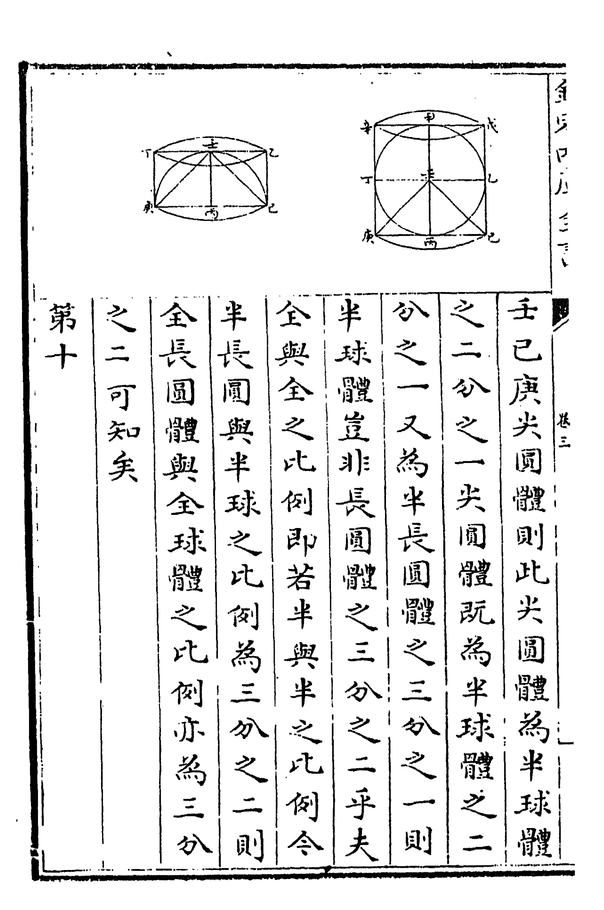
為大尖圓體積之四分之一而亦為球體之四分之一矣球體原與大尖圓相等夫大尖圓體之底積原與球體之外面積等小尖圓體底積既為大尖圓體底積之四分之一亦必為球體外面積之四分之一而丁己圓面固與小尖圓之底積等則為球體外面積之四分之一無疑矣至於庚壬圓面之徑原比丁己圓面之徑大一倍則其面積必大四倍令丁己

圓面既為甲丙球體外面積之四分之一則庚壬圓面積比丁巳圓面積大四倍者安得不與球體外面積相等乎

第九

凡球體全徑與上下面平行長圓體底徑高度相等則球體為長圓體之三分之二也如甲乙丙丁一球體戊巳庚辛一長圓體此球體之乙丁全徑與長圓體之巳庚底徑度等而球體之甲丙全

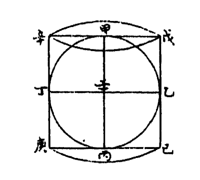
徑與長圓體之戊己高度等則球體積為長圓體積之三分之二也蓋長圓體與尖圓體同底同高則其比例為三分之一（五卷第二十三節言平底尖體與上下兩平行體同底同高則尖體為平行體三分之一）尖圓體之底徑與球之全徑等高與球之半徑等者尖圓體積為球體積之四分之一而尖圓體又為半球體之二分之一矣（說見前節）今於乙己庚丁半長圓體內作己壬庚半球體又作一



壬己庚尖圓體則此尖圓體為半球體之二分之一尖圓體既為半球體之二分之一又為半長圓體之三分之一則半球體豈非長圓體之三分之二乎夫全與全之比例即若半與半之比例今半長圓與半球之比例為三分之二則全長圓體與全球體之比例亦為三分之二可知矣

第十

凡球體全徑與長圓體底徑高度相等者其球體外面積與長圓體周圍面積等也如甲乙丙丁一球體戊己庚辛一長圓體其球體之乙丁全徑與長圓體之己庚底徑等而球體之甲丙全徑與長圓體之戊己高度等則此球體外面積必與長圓體之周圍面積等也大凡體之面積相等者其體積之比例同於其高之比例而體積之比例與高之比



例同者其面積必相等試將球體乙壬半徑分為六分取其三分為高以長圜周圜面積為底所成之體積必與長圜體積等取半徑之二分為高以球體外面積為底所成之體積必與球體之積等蓋長圜體與球體之比例原為三與二之比例此所成之二體亦必為三與二之比例一體之高為三分一體之高為二分是積之比例與高之比例同矣

非因其面積相等之故乎由是觀之球體外面積與長圓體周圍面積相等也明矣

第十一

凡球體全徑與上下面平行長圓體底徑高度相等者其相當每段之外面積皆相等也如甲乙丙丁一球體戊己庚辛一長圓體此球體之乙丁全徑與長圓體之己庚底徑等球體之甲丙全徑

與長圓體之戊己高度等則球體之癸丙寅一段凸面積必與相當長圓積之辰巳庚己一段周圍外面積等也夫乙辰巳丁一段長圓體内分出子癸寅丑一小長圓體餘癸子乙辰巳丁丑寅空心體此空心體與子癸寅丑長圓體之積必等何以知之葢壬癸為大圓面之半徑而所截卯癸又為小圓面之半徑其壬卯與卯癸之度又等故壬癸壬卯

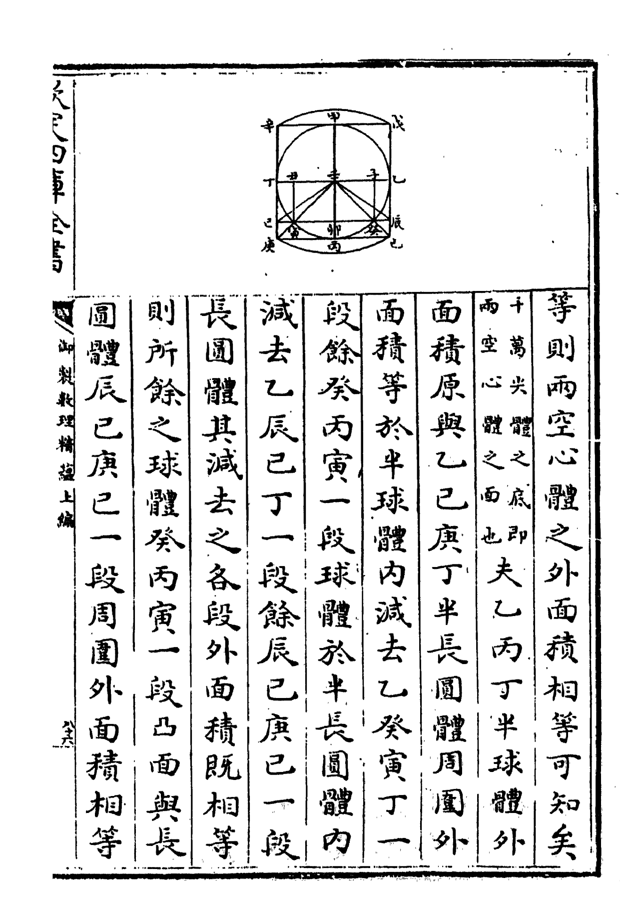
卯癸三線成一壬癸卯直角三角形而壬癸半徑所作圓面必與壬卯卯癸兩線為半徑所作兩圓面等見九卷第六節又壬癸與壬乙皆一圜之輻線其度必等而卯辰原與壬乙相等故卯辰為半徑所作之圓面即壬癸為半徑所作之圓面於卯辰為半徑所作圓面內減去卯癸為半徑所作圓面即餘壬癸環面與壬卯為半徑所作之圓面等而壬卯與卯



癸原相等然則辰癸環面既與壬卯半徑所作之圜面等亦必與卯癸為半徑所作之圜面等矣夫卯癸即小長圜底之半徑而辰癸又為空心體底之環徑其兩面積既等則其兩體積必等無疑矣又壬癸寅小尖圜體原與癸乙辰巳丁寅曲凹體等乙丙丁半球體為半長圜體三分之二則癸乙巳丙庚丁寅曲凹體為長圜體三分之一與壬巳庚尖圜體相等故壬癸寅一段尖圜體與相當癸乙辰巳丁寅一段曲凹體亦必相等也而壬癸

寅小尖圓體爲子癸寅丑小長圓體三分之一則癸乙辰巳丁寅曲凹體亦爲辰癸空心體之三分之一矣於乙辰巳丁長圓體内減去壬癸寅小尖圓體又減去癸乙辰巳丁寅曲凹體則餘乙癸壬寅丁一段空心球體必與乙辰壬巳丁一段空心長圓體等如以乙辰巳丁一段長圓體作六分則子癸寅丑小長圓爲三分壬癸寅小尖圓體爲一分與小尖圓體相等之癸乙辰巳丁寅曲凹體亦爲一分今既減去小尖圓體及曲凹體是於六分

內減去二分而存一段空心球體為四分也而壬辰巳大尖圓體亦為乙辰巳丁長圓體三分之一於長圓體內減去大尖圓體則餘乙辰壬巳丁空心長圓體為三分之二也三分之二之比例同同於六分之四之比例則此一段空心長圓體與一段空心球體相等無疑若將此兩空心體從壬心至外面剖為千萬尖體俱以乙壬半徑為高以兩空心外面為底體則空心球體所分之各尖體與空心長圓體所分之各尖體其積既等其高又等則其底不得不等同底同高者其積既等則同高同積者其底必等此各尖體之底既

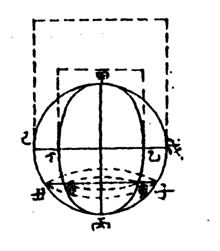


等則兩空心體之外面積相等可知矣千萬尖體之底即兩空心體之面也夫乙丙丁半球體外面積原與乙巳庚丁半長圓體周圍外面積等於半球體內減去乙癸寅丁一段餘癸丙寅一段球體於半長圓體內減去乙辰巳丁一段餘辰巳庚巳一段長圓體其減去之各段外面積既相等則所餘之球體癸丙寅一段凸面與長圓體辰巳庚巳一段周圍外面積相等

也明矣

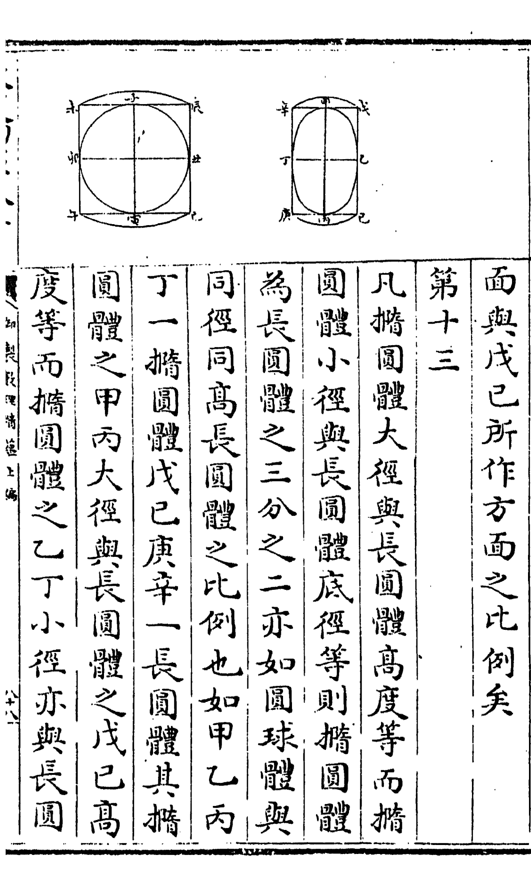
第十二

凡撱圓體大徑與圓球體徑相等者其二體積之比例即同於撱圓體小徑所作方面與圓球體徑所作方面之比例也如甲乙丙丁撱圓體之甲丙大徑與甲戊丙己圓球徑等則撱圓體積與球體積之比例即同於撱圓乙丁小徑所作方面與球體戊己徑所作方面之比



例也試將橢圓體與球體任意依徑線平行分之其所分之大小平圓面如子丑乃球體大圓面之徑寅卯乃橢圓體小圓面之徑此大小兩平圓面之比例同於其相當子丑寅卯二徑所作二方面之比例見八卷第十一節而子丑徑與寅卯徑之比例又同於戊己徑與乙丁徑之比例故此所分之大小圓面之比例亦必同於戊己方面與乙丁方面之比例

矣若將此兩體與戊己徑平行任意分為幾何面其相當大小兩面之比例皆如戊己方面與乙丁方面之比例此所分各面之比例既皆同於乙丁與戊己所作方面之比例則撱圓體與圓球體之比例必同於乙丁所作方面與戊己所作方面之比例可知矣即所分之寅丙卯撱圓體之一段與子丙丑圓球體之一段其比例亦必同於乙丁所作方



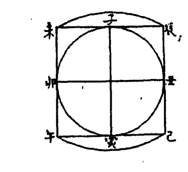
面與戊已所作方面之比例矣

第十三

凡撱圓體大徑與長圓體高度等而撱圓體小徑與長圓體底徑等則撱圓體為長圓體之三分之二亦如圓球體與同徑同高長圓體之比例也如甲乙丙丁一撱圓體戊已庚辛一長圓體其撱圓體之甲丙大徑與長圓體之戊已高度等而撱圓體之乙丁小徑亦與長圓

體之己庚底徑等則橢圓體為長圓體之三分之二其比例即如子丑寅卯球體與辰巳午未長圓體之比例也蓋戊己庚辛長圓體之戊己高度與辰巳午未長圓體之辰巳高度等故兩長圓體之比例即同於己庚底積與巳午底積之比例至於戊己庚辛長圓體之己庚底積與橢圓體之乙丁小徑所作圓面積等而辰巳午未長圓體之巳午底積





又與球體丑卯全徑所作圓面積等則戊己庚辛長圓體積與辰巳午未長圓體積之比例即同與橢圓體之乙丁小徑所作圓面與球體丑卯全徑所作圓面之比例矣夫橢圓體與球體之比例原同於橢圓體小徑所作圓面與球體全徑所作圓面之比例故橢圓體與球體之比例亦同於橢圓體同徑同高之長圓體與球體同徑同高之長圓體之

比例也若轉比之即戊己庚辛長圓體與甲乙丙丁橢圓體之比例亦同與辰巳午未長圓體與子丑寅卯球體之比例矣夫球體既為同徑同高長圓體之三分之二則橢圓體亦必為同徑同高長圓體之三分之二可知矣

第十四

凡函橢圓之長方體與所函橢圓體之比例同於函球之正方體與所函球體

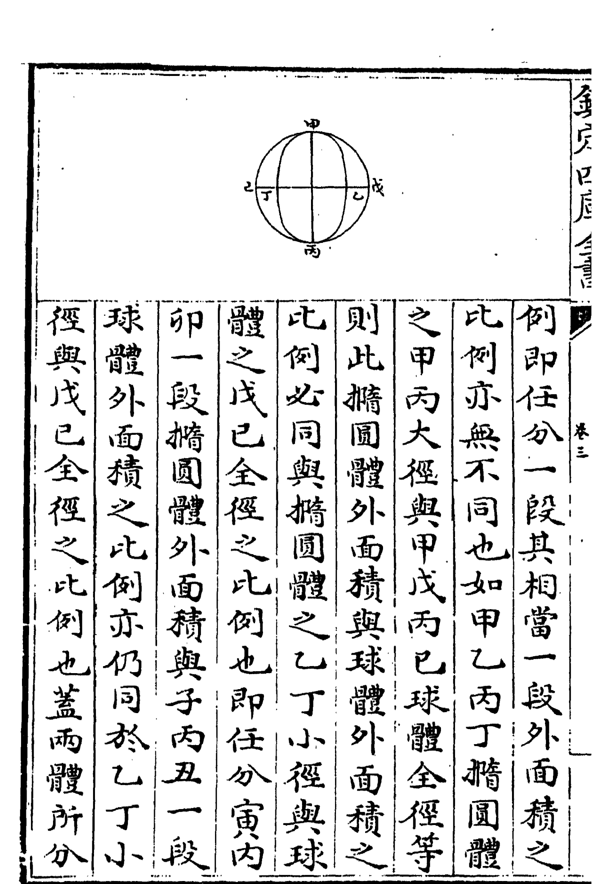
之比例也如甲乙丙丁長方體函一戊己庚辛楕圓體其長方體之甲乙高度與楕圓體之戊庚大徑等長方體之乙丙底度與楕圓體之己辛小徑等則此甲乙丙丁長方體與所函戊己庚辛楕圓體之比例同於壬癸子丑正方體與所函寅卯辰午球體之比例也蓋甲乙丙丁長方體之甲乙高度與壬癸子丑正方體之壬癸高度等故長方體與正

方體之比例同於兩體底積之比例今此長方體之底積與所函橢圓體之巳辛小徑所作方面等而正方體之底積與所函球體之卯午全徑所作方面等矣然則此長方體與正方體之比例不同於橢圓體小徑所作方面與球體全徑所作方面之比例乎夫橢圓體與球體之比例原同與橢圓體小徑所作方面與球體全徑所作方面之比例則橢

圓體與球體之比例同於函橢圓體之長方體與函球體之正方體之比例可知矣若轉比之則長方體與所函橢圓體之比例亦必同於正方體與所函球體之比例矣

第十五

凡橢圓體大徑與圓球體之徑等者其橢圓體外面積與球體外面積之比例即同於橢圓體小徑與球體全徑之比



例即任分一段其相當一段外面積之比例亦無不同也如甲乙丙丁橢圓體之甲丙大徑與甲戊丙己球體全徑等則此橢圓體外面積與球體外面積之比例必同與橢圓體之乙丁小徑與球體之戊己全徑之比例也即任分寅内卯一段橢圓體外面積與子丙丑一段球體外面積之比例亦仍同於乙丁小徑與戊己全徑之比例也蓋兩體所分

寅卯子丑平圓面皆與乙丁戊己徑線平行故寅卯圓界與子丑圓界之比同於寅卯圓徑與子丑圓徑之比而寅卯徑與子丑徑之比又同於乙丁徑與戊己徑之比也然此兩體依徑平分可為無數平圓界其相當各圓界之比例既皆同於乙丁徑於戊己徑之比例則全體外面積之比例豈不同於乙丁徑與戊己徑之比例乎至於所分之寅丙卯

一段橢圓體與子丙丑一段球體俱可分為平圓以比之則一段與一段之比例無異於全體與全體之比例也明矣

第十六

凡橢圓體大徑與長圓體高度等而橢圓體小徑與長圓體底徑等則橢圓體外面積與長圓體周圍外面積等即任分一段其相當一段之外面積亦無不等也如甲乙丙丁一橢圓體戊己庚辛

一長圓體其橢圓體之甲丙大徑與長圓體之戊己高度等而橢圓體之乙丁小徑與長圓體之己庚底徑等則橢圓體之外面積與長圓體周圍之面積等即任分壬丙癸一段橢圓體外面積亦與相當壬己庚癸一段長圓體之外面積等也試依橢圓體甲丙大徑度作子丑寅卯一球體并作與球體同高同徑辰巳午未一長圓體則此兩長圓體之

高度等其二體周圍面積之比例必同於二體底徑之比例二長圓體底徑之比例即是橢圓體之乙丁小徑與球體之丑卯全徑之比例也橢圓體外面積與球體外面積之比例原同於橢圓體乙丁徑與球體丑卯徑之比例則戊己庚辛長圓體外面積與橢圓體外面積之比例亦同於辰巳午未長圓體外面積與球體外面積之比例也夫球體外

面積原與辰巳午未長圓體外面積等而撱圓體外面積與戊己庚辛長圓體外面積之比例既與球體外面積與辰巳午未長圓體外面積之比例相同則此撱圓體外面積與戊己庚辛長圓體外面積相等無疑矣至於撱圓體所分一段與球體所分一段之比例與其全體之比例亦相同令撱圓體外面全積與戊己庚辛長圓體周圍外面全積之

比例既同於球體外面全積與辰巳午未長圓體周圍外面全積之比例則所分橢圓體之壬丙癸一段外面積與長圓體之壬巳庚癸一段外面積之比例亦必同於所分球體之申寅酉一段外面積與長圓體之戌巳午亥一段外面積之比例矣彼球體之申寅酉一段外面積既與長圓體之戌巳午亥一段外面積相等則此橢圓體之壬丙癸一段

外面積與長圓體之壬己庚癸一段外面積相等也明矣

御製數理精蘊上編卷三